अंकों का जादू

Fun with Numbers



पुस्तक महल
दिल्ली

अंकों का जादू

लेखक

अमित गर्ग

पुस्तक महल

खारी बावली, दिल्ली

प्रकाशक

पुस्तक महल, दिल्ली-110006

विक्रय केन्द्र

• 6686, खारी बावली, दिल्ली-110006........................फोन: 239314, 2911979

• 10-बी, नेताजी सुभाष मार्ग, दरियागंज, नई दिल्ली-110002...फोन: 3268292-93, 3279900

प्रशासनिक कार्यालय

एफ-2/16, अंसारी रोड, दरियागंज, नई दिल्ली-110002

फोन: 3276539, 3272783, 3272784

Telex: 031-78090 SBP IN * Fax: 91-11-2924673, 91-11-3260518

शाखा कार्यालय

• 23-25, जाओबा वाडी, ठाकुरद्वार, बंबई-400002 फोन: 2010941

• 22/2, मिशन रोड (शामा राव कम्पाउंड), बंगलोर-560027 फोन: 2234025

• खेमका हाउस, वूमेन्स हॉस्पिटल के सामने, अशोक राजपथ, पटना-800004 फोन: 653644

मूल्य :

पेपरबैक संस्करण: 20/- रुपये

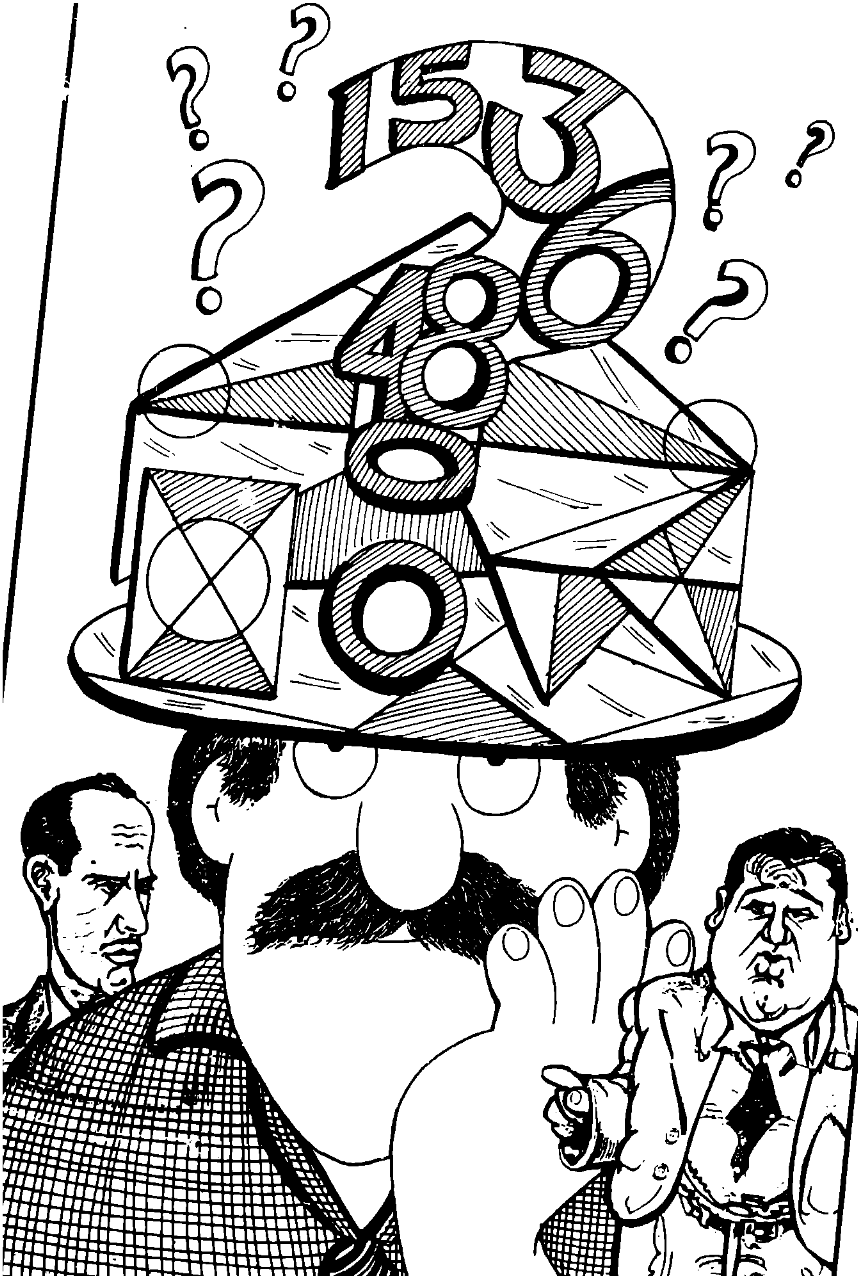
लाइब्रेरी संस्करण: 40/- रुपये

तीसरा संस्करण: जून 1994

लेजर टाइप सेटिंग: एस.बी.पी. इलेक्ट्रॉनिक्स पब्लिशिंग, 4/45, रूप नगर, दिल्ली-110007

मुद्रक: रूपक प्रिंटर्स, नवीन शाहदरा, दिल्ली-110032

विषय-सूची


153
R. GHOSH

1
संख्याओं से मनोरंजन

1. कैलेंडर की तीन संख्याओं के वर्ग का योग

अपने किसी मित्र को कैलेंडर में से कोई तीन लगातार दिनांक चुनने के लिए कहें। उसे किसी कॉलम में सबसे छोटी संख्या से आरंभ करने के लिए कहें। इस प्रकार बने तीन संख्याओं के वर्ग के 9 अंकों का योग आप बता सकते हैं (चित्र 1.1)। कैसे? अपने मित्र से पूछें कि उसने सबसे छोटी संख्या कौन-सी चुनी है। इस संख्या में 8 जोड़कर 9 से गुणा करें। यही परिणाम वांछित योग होगा। उदाहरण के लिए माना कि सबसे छोटी संख्या 6 है। 6 + 8 = 14, 14 × 9 = 126। इसी प्रकार कोई भी वर्ग बनाकर योग निकाला जा सकता है।

र.	सो.	मं.	बु.	बृ.	शु.	श.
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31

चित्र 1.1

2. उम्र बताने वाली तालिका

अगले पृष्ठ पर दी गई तालिका की मदद से आप किसी भी व्यक्ति की उम्र पता लगा सकते हैं। आपको उस व्यक्ति से सिर्फ यह पूछना है कि कौन-कौन-से कॉलम में उसकी उम्र दी गई है। अब उन कॉलमों में सबसे ऊपर दी गई संख्याएं जोड़ लें। जोड़ से प्राप्त संख्या ही उस व्यक्ति की उम्र है।

उदाहरण के लिए माना कि आपके एक मित्र की आयु 23 वर्ष है। यह संख्या पहले, दूसरे, तीसरे और पांचवें कॉलम में है। इन कॉलमों में सबसे ऊपर की संख्याएं 1, 2, 4 और 16 है, जिनका योग 23 आता है।

तालिका

1	2	4	8	16	32
3	3	5	9	17	33
5	6	6	10	18	34
7	7	7	11	19	35
9	10	12	12	20	36
11	11	13	13	21	37
13	14	14	14	22	38
15	15	15	15	23	39
17	18	20	24	24	40
19	19	21	25	25	41
21	22	22	26	26	42
23	23	23	27	27	43
25	26	28	28	28	44
27	27	29	29	29	45
29	30	30	30	30	46
31	31	31	31	31	47
33	34	36	40	48	48
35	35	37	41	49	49
37	38	38	42	50	50
39	39	39	43	51	51
41	42	44	44	52	52
43	43	45	45	53	53
45	46	46	46	54	54
47	47	47	47	55	55
49	50	52	56	56	56
51	51	53	57	57	57
53	54	54	58	58	58
55	55	55	59	59	59
57	58	60	60	60	60
59	59	61	61	61	61
61	62	62	62	62	62
63	63	63	63	63	63

3. किसी के भाई-बहनों की संख्या ज्ञात करना, यदि उसके माता-पिता जीवित हों

यहां किसी के भाई-बहनों की संख्या पता लगाने का एक बहुत आसान तरीका दिया जा रहा है।

चरण -1 अभिभावकों की संख्या जोड़ें (यह 2 होगी)।

चरण -2 भाइयों की संख्या जोड़कर 2 से गुणा करें और गुणनफल में 1 जोड़ें।

चरण -3 अब चरण-2 के उत्तर को 5 से गुणा करें और इसमें बहनों की संख्या जोड़ें।

चरण -4 चरण-3 के उत्तर में से 25 घटाने पर आपको अपने प्रश्न का उत्तर मिल जाएगा।

चरण -5 चरण-4 के उत्तर का इकाई वाला अंक बहनों की संख्या और दहाई वाला अंक भाइयों की संख्या है।

इसके आधार पर यह सूत्र लिखा जा सकता है कि

[(माता और पिता+भाई) × 2 + 1] × 5 + बहनें - 25

उदाहरण :

माना कि राम के 3 भाई और 2 बहनें हैं।

चरण -1	माता-पिता की संख्या	= 2
चरण -2	(2 + 3) × 2 +1	= 11
चरण -3	11 × 5 + 2	= 57
चरण -4	57 - 25	= 32
चरण -5	इकाई का अंक	= 2 बहनें
	दहाई का अंक	= 3 भाई

4. फोन नंबर से उम्र का ज्ञान

किसी की उम्र बताने के लिए उसे किसी फोन नंबर के आखिरी 4 अंकों को लिखने के लिए कहिए। माना कि चार अंक हैं 8231 । अब उसे इन्हीं अंकों का प्रयोग करके कोई नई संख्या लिखने के लिए कहें। माना कि वह लिखता है - 2318 । अब बड़ी संख्या में से छोटी संख्या घटा दें। उत्तर आएगा-5913 ।

सभी अंकों को जोड़ लीजिए यानी 5+9+1+3 = 18 = 1+8=9

उत्तर में 16 जोड़िए यानी 9+16 = 25

अब उस व्यक्ति को इस संख्या में उसके जन्म का वर्ष जोड़ने के लिए कहिए।

1945+25 = 1970

उससे अंतिम उत्तर पूछिए। इसमें से 25 घटाने पर आप उसके जन्म का वर्ष बता देंगे- 1970-25 = 1945 ।

5. किसी की भी उम्र बता कर आश्चर्यचकित करना

जिस व्यक्ति को गणित का थोड़ा-बहुत मूल ज्ञान है, वह बड़ी सरलता से इस तरीके द्वारा किसी की भी उम्र बता सकता है।

चरण -1 सबसे पहले उस व्यक्ति को उसकी वर्तमान उम्र में अगले वर्ष की उम्र जोड़ने के लिए कहें।

चरण -2 इस योग को 5 से गुणा करवाएं।

चरण -3 गुणनफल में उसके जन्म वाले वर्ष की इकाई का अंक जोड़ने के लिए कहें।

चरण -4 प्राप्त उत्तर में से 5 घटाने के लिए कहें।

चरण -5 बायीं ओर के दोनों अंक उस व्यक्ति की उम्र दर्शाएंगे।

उदाहरण :

माना कि आपके मित्र की उम्र 12 वर्ष है और वह 1980 में पैदा हुआ था।

चरण -1 वर्तमान उम्र + अगले वर्ष की उम्र = 25

चरण -2 चरण-1 × 5 यानी 25 × 5 = 125

चरण -3 चरण-2 + जिस वर्ष में आपका मित्र पैदा हुआ है, उसका इकाई वाला अंक यानी 125 + 0 = 125

चरण -4 चरण-3 5 = 125 - 5 = 120

चरण -5 बायीं ओर के दोनों अंक 12 बनाते हैं। यही आपके मित्र की उम्र है।

6. अपने मित्र की जेब में नोटों की संख्या बताना

1. अपने मित्र को नोटों की संख्या सोचने के लिए कहिए।
2. अब उसे वह दुगुना कर ले।
3. उत्तर में 1 जोड़े।
4. इस संख्या को 5 से गुणा करे।
5. इस उत्तर में 5 जोड़ने के लिए कहें।

6. अब इसे 10 से गुणा करने के लिए कहें।
7. उत्तर में से 100 घटाने के लिए कहें।
8. अब आप उससे प्राप्त संख्या पूछें। आप इस संख्या के अंतिम दो अंक छोड़ दें। शेष बची संख्या ही नोटों की संख्या है।

उदाहरण :

माना कि आपके मित्र ने नोटों की संख्या लिखी	:	16
दुगुना करने पर	:	32
1 जोड़ने पर	:	33
5 से गुणा करके	:	165
5 जोड़ कर आया	:	170
फिर 10 से गुणा करने पर	:	1700
1700 में से 100 घटाने पर	:	1600

संख्या 1600 आपके मित्र ने आपको बताई। इसके अंतिम दो अंक छोड़ कर बचा 16, यही नोटों की संख्या है।

7. आयु और जन्म तिथियों के आश्चर्य

हम सप्ताह के दिनों, महीनों और वर्षों को अंकों की सहायता से दर्शा सकते हैं। सप्ताह के दिन इस प्रकार लिखे जाएंगे-

सोमवार के लिए	1
मंगलवार के लिए	2
बुधवार के लिए	3 आदि ।

वर्ष के महीने इस प्रकार लिखे जाएंगे-

जनवरी के लिए	1
फरवरी के लिए	2
मार्च के लिए	3 आदि।

1. अपने मित्र से कहिए कि वह अपने जन्म का दिन, महीना, वर्ष और तिथि के अंकों का प्रयोग करके लिखे।
2. अब उसे इस संख्या को दुगुना करने के लिए कहिए।

3. इसमें 5 जोड़ने के लिए कहिए।

4. योगफल को 50 से गुणा करवाइए।

5. प्राप्त उत्तर में वर्तमान उम्र जोड़ने के लिए कहिए।

6. इसमें से 365 घटाने के लिए कहिए।

7. अब इस संख्या में 115 जोड़ने के लिए कहिए।

इस प्रकार प्राप्त उत्तर एक अनोखापन लिए हुए है, क्योंकि इसका प्रथम अंक उस सप्ताह का दिन, दूसरा अंक महीना और तीसरा अंक वह तारीख दर्शाएगा, जब आपका मित्र पैदा हुआ था। बाकी बची संख्या उसकी वर्तमान आयु है।

उदाहरण :

मान लिया कि आपका मित्र रविवार 6 मई, 1962 को पैदा हुआ था और अब उसकी आयु 30 वर्ष है।

1. इस प्रकार हमारे पास संख्या आई 756, जिसमें '7' सप्ताह का दिन, '5' वर्ष का महीना और '6' तारीख दर्शा रहे हैं।

2.	अपने मित्र से यह संख्या दुगुनी करने को कहिए	:	1512
3.	इस उत्तर में 5 जोड़ने दीजिए	:	1517
4.	इस संख्या को 50 से गुणा करने दीजिए	:	75,850
5.	वर्तमान आयु जोड़ने पर	:	75,880
6.	इसमें से 365 घटाने पर	:	75,515
7.	अंत में 115 जोड़ने पर	:	75,630

75,630 में पहला अंक '7' सप्ताह का दिन यानी रविवार '5' वर्ष का महीना यानी मई और '6' तारीख दर्शा रहा है। यही आपके मित्र के जन्म का दिन, महीना और तारीख है। शेष बचा 30, जो उसकी वर्तमान आयु है।

8. आपके मित्र के पास (एक रुपये से कम वाले) कितने सिक्के हैं और उसकी आयु क्या है?

आप सिर्फ अपने मित्र को इस प्रकार बताएं-

1. अपनी आयु वह मन में सोच ले।
2. इसे दुगुना करे।
3. इसमें 5 जोड़े।
4. 50 से गुणा करे।

5. 365 घटा दे।

6. प्राप्त उत्तर में जेब की रेजगारी जोड़ लें।

7. अब प्राप्त संख्या में 115 जोड़ लें।

जो भी उत्तर आएगा, उसके पहले दो अंक आपके मित्र की आयु और शेष अंक उसकी जेब में मौजूद रेजगारी बताते हैं।

उदाहरण :

1.	माना कि आपके मित्र की आयु है	=	20
2.	दुगुना	=	40
3.	5 जोड़कर	=	45
4.	50 से गुणा करने पर	=	2,250
5.	365 घटाकर	=	1,885
6.	रेजगारी (75 पैसे) जोड़कर	=	1,960
7.	115 जोड़ने पर	=	2,075

2,075 दर्शाता है कि आपके मित्र की आयु 20 वर्ष है और उसकी जेब में 75 पैसे की रेजगारी है।

9. उन भाई-बहनों की संख्या पता लगाना, जिनके माता-पिता जीवित नहीं हैं।

इस दुनिया में बहुत-से लोग ऐसे भी हैं, जिनके माता-पिता जीवित नहीं हैं। एक युक्ति से आप उनके भाई-बहनों की संख्या बता सकते हैं।

चरण-1 भाइयों की संख्या को 2 से गुणा करके उसमें 3 जोड़ दें।

चरण-2 चरण-1 के उत्तर को 5 से गुणा करके उसमें बहनों की संख्या जोड़ दें।

चरण -3 प्राप्त उत्तर में से 15 घटा दें।

चरण-4 अंतिम उत्तर की इकाई का अंक बहनों की और दहाई का अंक भाइयों की संख्या दर्शाता है।

इस युक्ति की एक सीमा है। यदि भाइयों और बहनों की संख्या 9 से अधिक है, तो इसका प्रयोग नहीं किया जा सकता।

■ ■

2
संख्याओं का जादू

1. दो बार दोहराए गए तीन अंकों की संख्या प्राप्त करना

अपने मन में तीन अंकों की कोई संख्या सोच लीजिए। इसे 11 से गुणा कीजिए। गुणनफल को फिर 91 से गुणा कीजिए। प्राप्त उत्तर आरंभिक संख्या को दो बार लिखने के समान होगा। आइए देखें, कैसे -

उदाहरण -1

1. माना कि तीन अंकों की संख्या है : 456
2. इसे 11 से गुणा करने पर आया : 5016
3. गुणनफल को 91 से गुणा करने पर आया : 456456
4. 456456 में आरंभिक संख्या दो बार लिखी गई है।

उदाहरण -2

1. माना कि तीन अंकों वाली संख्या है : 777
2. इसे 11 से गुणा करने पर : 8547
3. इस संख्या (8547) को 91 से गुणा करने पर : 777777

   777777 में आरंभिक संख्या दो बार आई है।

2. तीन अंकों वाली संख्याओं की जादूगरी

1. कोई तीन अंकों की संख्या अपने मन में सोचिए।
2. इसी के आगे वे ही तीन अंक दोहरा कर इसे छह अंकों की संख्या बना दीजिए।
3. छह अंकों की इस संख्या को 7 से भाग दीजिए।
4. भाज्य को 11 से भाग दीजिए।
5. प्राप्त उत्तर को 13 से भाग दीजिए।
6. आप फिर से उसी संख्या पर आ गए, जिससे आपने शुरुआत की थी।

उदाहरण- 1

1.	माना कि तीन अंकों वाली संख्या है	:	362
2.	अब इस संख्या को दो बार लिख कर छह अंकों की संख्या बनी	:	362362
3.	इसे 7 से भाग करने पर आया	:	51766
4.	51766 को 11 से भाग देने पर आया	:	4701
5.	4701 को 13 से भाग देने पर आया	:	362

उदाहरण- 2

1.	माना कि तीन अंकों की संख्या है	:	789
2.	इस संख्या को दोहरा कर छह अंकों की संख्या बनी	:	789789
3.	इसे 7 से भाग देने पर आया	:	112827
4.	112827 को 11 से भाग देने पर आया	:	10257
5.	10257 को 13 से भाग देने पर आया	:	789

3. परिणाम हमेशा 7 ही होगा

कोई एक संख्या सोचिए। इसका दुगुना कीजिए। इसमें 14 जोड़िए। अब जो संख्या आती है, उसमें 2 से भाग दीजिए। इस भागफल में से आरंभिक संख्या घटाइए। उत्तर हमेशा 7 ही होगा।

उदाहरण-1

1.	माना कि संख्या है	:	10
2.	इसका दुगुना	:	20
3.	अब पहले 14 जोड़ने पर	:	34
4.	इसे 2 से भाग देने पर	:	17
5.	17 में से आरंभिक संख्या (10) घटाने पर	:	7

उदाहरण- 2

1.	माना कि दूसरी संख्या है	:	45
2.	दुगुना करने पर	:	90
3.	पहले 14 जोड़ने पर	:	104
4.	104 में 2 से भाग देने पर	:	52

5. इसमें से 45 घटाने पर : 7

तो आपने देखा कि उत्तर हर बार 7 ही आता है। अब आप अपने दोस्तों के बीच यह जादूगरी दिखा सकते हैं।

4. संख्याओं का एक विचित्र खेल

कोई संख्या सोचिए। इसे 3 से गुणा करें। फिर 2 जोड़ दें। प्राप्त उत्तर को पुन: 3 से गुणा करें। गुणनफल में वह संख्या जोड़ें, जो सोची गई संख्या से 2 अधिक हो। इस उत्तर की इकाई के स्थान वाले अंक को छोड़ कर शेष अंक शुरू में सोची गई संख्या है।

उदाहरण-1

1. माना कि संख्या है : 35
2. 3 से गुणा करने पर : 105
3. इस संख्या में 2 जोड़ने पर : 107
4. फिर 3 से गुणा करने पर : 321
5. अब गुणनफल में सोची गई संख्या (37) जोड़नी है। 321 + 37 = 358
   358में इकाई के स्थान पर 8 है। उसे छोड़ कर 35 बचता है, जो सोची गई संख्या है। तो पसंद आया आपको यह खेल?

उदाहरण - 2

1. आइए, एक और संख्या सोचें : 7
2. इसे 3 से गुणा करने पर : 21
3. 21 में 2 जोड़ने पर : 23
4. इस संख्या को 3 से गुणा करने पर : 69
5. गुणनफल में 9 जोड़ने पर : 78
   (क्योंकि 9 आरंभिक संख्या से 2 अधिक है)

अब आप 78 की इकाई वाले स्थान के अंक यानी 8 को छोड़ कर देखिए। बचेगा 7 । यही तो हमने शुरू में सोचा था।

5. जादुई संख्या

आइए, हम आपको एक ऐसी संख्या बताएं, जिसके बारे में जानकर आप आश्चर्यचकित हो जाएंगे। यह संख्या है 142857 देखिए-

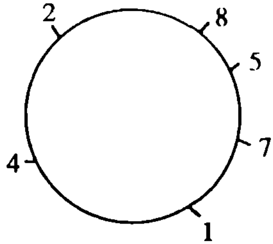
142857 × 2 = 285714

142857 × 3 = 428571

142857 × 4 = 571428

142857 × 5 = 714285

142857 × 6 = 857142



अब आप यह समझ गए होंगे कि 142857 को 2,3,4,5 या 6 से गुणा करके जो गुणनफल प्राप्त होता है, वह इस संख्या के किसी एक अंक से शुरू होकर एक निश्चित क्रम में उन्हीं अंकों के प्रयोग से बना होता है, जैसे चित्र में दिखाया गया है।

6. गायब अंक बताइए

चरण -1 छह या सात अंकों की कोई बड़ी संख्या सोचिए।

चरण - 2 सभी अंकों को जोड़ लीजिए।

चरण - 3 इस योग को सोची गई संख्या में से घटाइए।

चरण - 4 प्राप्त संख्या के अंकों को आगे-पीछे कर लीजिए।

चरण - 5 इसमें 25 जोड़िए।

चरण - 6 0 के अलावा किसी अन्य अंक को बाहर निकाल लीजिए।

चरण - 7 शेष अंकों का योग बताइए।

इस योग से बाहर निकाले गए अंक के बारे में आप बता सकते हैं। इसके लिए अंकों के योग को 25 में से घटाइए। प्राप्त संख्या निकाला गया अंक है।

उदाहरण :

चरण - 1	सोची गई संख्या	:	1234567
चरण - 2	अंकों का योग	:	28
चरण - 3	1234567-28	:	1234539
चरण - 4	अंकों को आगे-पीछे करके	:	1235349
चरण - 5	1235349 + 25	:	1235374
चरण - 6	गायब किया अंक	:	5
चरण - 7	अंक गायब होने के बाद बची संख्या	:	123374
चरण - 8	शेष अंकों का योग	:	20

गायब किया गया अंक	:	25-20=5

7. योग सदा 1089 ही होगा

आइए, आपको संख्याओं के एक और दिलचस्प खेल के बारे में बताएं, जिससे आप अपने मित्रों को हैरत में डाल सकते हैं। अपने किसी मित्र से कहें कि आप एक सवाल का उत्तर सवाल किए जाने से पहले ही एक कागज पर लिख सकते हैं। आप एक कागज पर 1089 लिख कर कागज को मोड़ कर अपने मित्र की जेब में रख दीजिए और फिर खेल शुरू कीजिए।

अपने मित्र से तीन अंकों वाली एक ऐसी संख्या लिखने के लिए कहिए, जिसमें दहाई के स्थान वाला अंक इकाई के स्थान वाले अंक से कम-से-कम दो अधिक हो।

माना कि उसने 981 सोचा। अब उसे 981 के नीचे इस संख्या को उलट कर लिखने के लिए कहिए। वह 189 लिखेगा। अब बड़ी संख्या में से छोटी संख्या को घटाने के लिए कहिए। उत्तर 792 आएगा।

अब इसी संख्या को उल्टा कर 792 में जोड़ने के लिए कहिए। 792 + 297 = 1089 उत्तर आएगा। इस प्रकार कोई भी संख्या लेकर आप 1089 तक पहुंच सकते हैं।

सोची गई संख्या	:	761	321
उलट कर	:	167	123
घटाने पर	:	594	198
उत्तर उल्टा करने पर	:	495	891
जोड़ने पर	:	1089	1089

जब आपका मित्र उस कागज को निकाल कर 1089 देखेगा, तो इस आश्चर्य में पड़ जाएगा कि आखिर आपने पहले ही उत्तर कैसे जाना।

8. एक अंक से पूरी संख्या जानना

1 से 9 के बीच की कोई संख्या सोचने के लिए अपने मित्र से कहें। उसके आगे शून्य लगाने दीजिए।

दोनों संख्याओं को जोड़ने के लिए कहें।

जोड़ को क्रमशः 3, 11 और 3 से गुणा करने दीजिए। जो उत्तर आया, उसकी इकाई का अंक पूछिए।

इसकी सहायता से आप पूरी संख्या बता सकते हैं।

आपको इकाई का अंक पता है। दूसरा अंक जानने के लिए आखिरी अंक (इकाई

वाले) को 9 में से घटाइए।

पहला अंक जानने के लिए दूसरे अंक में एक जोड़िए।

यह आरंभिक संख्या का पहला अंक है।

9 में से पहला अंक घटा कर तीसरे अंक का पता लगा सकते हैं।

इन अंकों को ढंग से रखने पर संपूर्ण संख्या आपके सामने आ जाएगी।

उदाहरण:

सोची गई संख्या	:	3
इसके आगे शून्य लगाने पर	:	30
3 जोड़ने पर	:	33
3 से गुणा करने पर	:	99
11 से गुणा करने पर	:	1089
फिर 3 से गुणा करने पर	:	3267
.... अंतिम अंक		7
.... दूसरा अंक		(9-7)=2
.... पहला अंक		(2 + 1) = 3
.... तीसरा अंक		(9-3) = 6

9. गुप्त अंक

निम्नलिखित विधि द्वारा आप अंक 9 की गुप्तता बता सकते हैं।

चरण -1 अपने मित्र को छह अंकों वाली कोई संख्या सोचने के लिए कहें।

चरण -2 उसे सभी अंक जोड़ने के लिए कहें।

चरण -3 अब उससे कहें कि इस योग को छह अंकों वाली संख्या में से घटाए।

चरण -4 अब आप कहें कि वह प्राप्त उत्तर में से कोई एक अंक छिपा ले और शेष अंकों को जोड़ ले।

चरण -5 जब वह उत्तर बताए, तब आप उसे छिपा हुआ अंक बता सकते हैं। आप सिर्फ इतना कीजिए कि आए हुए उत्तर से अगले 9 के गुणनखंड में से उसे घटा दीजिए।

उदाहरण-1

चरण -1 छह अंकों की संख्या 124567

चरण -2 अंकों का योग 1 + 2+ 4 + 5 + 6 + 7 = 25

चरण -3 छह अंकों की संख्या-अंकों का योग 124567 - 25 = 124542

चरण -4 माना कि छिपाया गया अंक है 5

चरण -5 और शेष अंकों का योग 13

चरण -6 तो अंतिम उत्तर 13 आया। अब आप 13 से अगले 9 के गुणनखंड यानी 18 में से 13 को घटा दीजिए। आपका उत्तर 5 आएगा। यही आपके मित्र द्वारा छिपाया गया अंक है।

उदाहरण- 2

चरण -1 छह अंकों की संख्या 549218

चरण -2 अंकों का योग 29

चरण -3 छह अंकों की संख्या-अंकों का योग 549189

चरण -4 माना कि छिपा हुआ अंक 1

चरण -5 शेष अंकों का योग 35

चरण -6 9 के अगले गुणनखंड यानी 36 में से 35 घटाने पर 1 बचता है। 1 ही आपके मित्र द्वारा छिपाया गया अंक था।

10. पूर्ण संख्या के अंकों को बताना

चरण – 1 अपने मित्र से 1 से 9 के बीच की कोई दो संख्याएं सोचने के लिए कहिए।

चरण- 2 पहली संख्या को दुगुना करके उसमें 5 जोड़ देने के लिए कहिए।

चरण -3 चरण -2 के उत्तर वाले को 5 से गुणा करके उसमें दूसरी संख्या जोड़ने के लिए कहिए।

चरण -4 चरण -3 के उत्तर वाले अंक में से 25 घटाने के लिए कहिए।

चरण -5 चरण -4 के उत्तर वाले अंक से आप अपने मित्र द्वारा सोची गई दोनों संख्याएं जान जाएंगे।

उदाहरण:

चरण -1 माना कि सोची गई संख्याएं हैं - 1 और 8

चरण -2 पहली संख्या का दुगुना + 5 = 2 × 1 + 5 = 7

चरण -3 चरण -2 का उत्तर × 5 + दूसरी संख्या
= 7 × 5 + 8= 35 + 8 = 43

चरण -4 चरण-3 का उत्तर - 25 = 43 - 25 = 18

चरण -5 चरण - 4 का उत्तर = 18 है, जो दर्शाता है कि आपके मित्र ने जो संख्याएं सोची थी, वे हैं-1 और 8 ।

दूसरी विधि-

चरण -1 अपने मित्र को दो अंकों का कोई पूर्णांक सोचने के लिए कहें।

चरण -2 अब उसे दहाई के अंक को 5 से गुणा करके पांच जोड़ने के लिए कहें।

चरण -3 चरण-2 के उत्तर को दुगुना करने के लिए कहें।

चरण -4 चरण-3 के उत्तर में इकाई का अंक जोड़ कर अपने मित्र से उसका उत्तर पूछें।

चरण -5 अब अपने मित्र के उत्तर में से 14 घटा लें। घटाने के बाद प्राप्त संख्या आपके मित्र द्वारा सोची गई संख्या है।

उदाहरण:

चरण -1 माना कि संख्या 27 है

चरण -2 2 × 5 + 7 = 17

चरण -3 चरण-2 का दुगुना = 2 × 17 = 34

चरण -4 चरण-3 के उत्तर में इकाई का अंक जोड़ने पर 7+ 34 = 41

चरण -5 41-14 = 27। यही (27 ही) सोची हुई संख्या थी।

समानांतर विधि-

चरण -1 अपने मित्र से 3 अंकों वाला कोई पूर्णांक सोचने के लिए कहिए।

चरण -2 सैकड़े के अंक को 2 से गुणा करके उसमें 3 जोड़ने के लिए कहिए।

चरण -3 प्राप्त संख्या को 5 से गुणा कर के 7 जोड़ने के लिए कहिए।

चरण -4 चरण-3 के उत्तर में आरंभिक संख्या की दहाई वाला अंक जोड़ दें।

चरण -5 चरण-4 के उत्तर को दुगुना करें और उसमें 3 जोड़ें।

चरण -6 चरण -5 के उत्तर को 5 से गुणा करें और उसमें आरंभिक संख्या का इकाई वाला अंक जोड़ें।

चरण -7 मित्र से उत्तर पूछ कर उसमें से 235 मन-ही-मन घटा दें। उत्तर मित्र द्वारा सोची गई संख्या ही होगा।

उदाहरण:

चरण -1	सोची हुई संख्या	=	100
चरण -2	1 × 2 + 3	=	5

चरण -3	5 × 5+ 7	=	32
चरण -4	32 × 0	=	32
चरण -5	32 × 2 + 3	=	67
चरण -6	67 × 5 + 0	=	335

चरण -7 335 - 235 = 100, जो आपके मित्र के द्वारा सोची गई संख्या है।

11. संख्याओं का एक खेल, जिसमें उत्तर हमेशा 15 आता है

एक संख्या सोचें। माना कि यह संख्या 12 है। इसे 5 से गुणा करें। तब 12 × 5 = 60 आएगा। इसमें 25 जोड़ने पर 60 + 25 = 85 आएगा। इसे 5 से भाग देने पर भागफल 17 आता है। इसमें से सोची हुई संख्या घटाने पर 17-12 = 5 होगा। इसमें 3 से गुणा करने पर हमें प्राप्त होता है 15 । इस प्रकार उत्तर हमेशा 15 ही होगा।

12. एक अरब गिनें

यदि एक व्यक्ति 100 संख्याएं प्रति मिनट की रफ्तार से प्रतिदिन 8 घंटे गिने और इस क्रम को सप्ताह में 5 दिन जारी रखे, तो उसे दस लाख तक की गिनती गिनने में 4 सप्ताह से कुछ अधिक समय लगेगा। एक अरब तक गिनने में तो 80 वर्ष से भी अधिक समय लगेगा।

■ ■

3

अंकों के अद्भुत रूप

हमें अपनी उतार-चढ़ाव की जिंदगी में प्राकृतिक संख्याओं के अनेक विचित्र नमूने देखने को मिलते हैं। यदि हम उन संख्याओं पर विचार करें, तो उनकी रचना में हमें कुछ-न-कुछ उद्देश्य दिखाई देता है, लेकिन प्राकृतिक घटनाओं के साथ हम उन्हें भली-भांति जोड़ नहीं पाते हैं।

संख्याओं के ढांचे न तो अंकगणित से, न ज्यामिति से और न ही किसी श्रेणी से मिलते-जुलते हैं। फिर भी वे अनंत तक एक नियमबद्ध रूप में चलते हैं। गणित विशेषज्ञों ने इन ढांचों को बड़े सुंदर ढंग से निर्मित किया है, लेकिन इनके विषय में वे कोई संकल्पना नहीं दे पाए हैं। प्राकृतिक संख्याओं की अपनी विशेष संरचना होती है। आइए, हम प्राकृतिक संख्या 8 का कमाल देखते हैं।

1. प्राकृतिक संख्या 8 का कमाल

1 × 8 + 1	=	9
12 × 8 + 2	=	98
123 × 8 + 3	=	987
1234 × 8 + 4	=	9876
12345 × 8 + 5	=	98765
123456 × 8 = 6	=	987654
1234567 × 8 + 7	=	9876543
12345678 × 8 + 8	=	98765432
123456789 × 8 + 9	=	987654321

2. प्राकृतिक संख्या 9 का कमाल

0 × 9 + 1	=	1
1 × 9 + 2	=	11
12 × 9 + 3	=	111

123 × 9 + 4	=	1111
1234 × 9 + 5	=	11111
12345 × 9 + 6	=	111111
123456 × 9 + 7	=	1111111
1234567 × 9 + 8	=	11111111
12345678 × 9 + 9	=	111111111
123456789 × 9 + 10	=	1111111111

3. गुणा का खेल

इस प्रकार गुणा करके प्राप्त उत्तरों की समानता देखिए-

9 × 0 + 8	=	8
9 × 9 + 7	=	88
9 × 98 + 6	=	888
9 × 987 + 5	=	8888
9 × 9876 + 4	=	88888
9 × 98765 + 3	=	888888
9 × 987654 + 2	=	8888888
9 × 9876543 + 1	=	88888888
9 × 98765432 + 0	=	888888888

4. 37 का कमाल

यदि आप 37 को 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27 (गणितीय समानांतर श्रेणी) से गुणा करेंगे, तो आपको अनोखे उत्तर मिलेंगे। आइए, ऐसा करके देखें-

37 × 3	=	111
37 × 6	=	222
37 × 9	=	333
37 × 12	=	444
37 × 15	=	555
37 × 18	=	666
37 × 21	=	777
37 × 24	=	888
37 × 27	=	999

5. 9 के विचित्र रूप

9 × 9	=	81
99 × 99	=	9801
999 × 999	=	998001
9999 × 9999	=	99980001
99999 × 99999	=	9999800001

6. 9 का एक और रूप

987654321 × 9 - 1	=	8888888888
87654321 × 9 - 1	=	788888888
7654321 × 9 - 1	=	68888888
654321 × 9 - 1	=	5888888
54321 × 9 - 1	=	488888
4321 × 9 - 1	=	38888
321 × 9 - 1	=	2888
21 × 9 - 1	=	188
1 × 9 - 1	=	8

7. 7 का कमाल

7 × 7	=	49
67 × 67	=	4489
667 × 667	=	444889
6667 × 6667	=	44448889
66667 × 66667	=	4444488889
666667× 666667	=	444444888889

8. 3 और 4 का कमाल

4 × 4	-	16
34 × 34	-	1156
334 × 334	=	111556
3334 × 3334	=	11115556
33334 × 33334	=	1111155556
333334 × 333334	=	111111555556

9. दिलचस्प गुणनफल

123456789 × 9	=	111111101
123456789 × 18	=	222222202
123456789 × 27	=	333333303
123456789 × 36	=	444444404
123456789 × 45	=	555555505
123456789 × 54	=	666666606
123456789 × 63	=	777777707
123456789 × 72	=	888888808
123456789 × 81	=	999999909

10. विचित्र गुणनफल

987654321 × 9	-	8888888889
987654321 × 18	=	17777777778
987654321 × 27	=	26666666667
987654321 × 36	=	35555555556
987654321 × 45	=	44444444445
987654321 × 54	=	53333333334
987654321 × 63	=	62222222223
987654321 × 72	=	71111111112
987654321 × 81	=	80000000001

11. 9 का जादू

222222222 × 9	=	1999999998
333333333 × 9	=	2999999997
444444444 × 9	=	3999999996
555555555 × 9	=	4999999995
666666666 × 9	=	5999999994
777777777 × 9	=	6999999993
888888888 × 9	-	7999999992
999999999 × 9	=	8999999991

12. सर्वोच्च शक्ति

एक से बनी प्रत्येक प्राकृतिक संख्या का वर्ग करने पर प्राकृतिक संख्याओं के विचित्र नमूने हमें प्राप्त होते हैं। जैसे -

$1^2 = 1$

$11^2 = 121$

$111^2 = 12321$

$1111^2 = 1234321$

$11111^2 = 123454321$

$111111^2 = 12345654321$

$1111111^2 = 1234567654321$

$11111111^2 = 123456787654321$

$111111111^2 = 12345678987654321$

13. '2' की श्रृंखला बनाइए

संख्याओं के योग से 2 की श्रृंखला इस प्रकार प्राप्त कर सकते हैं-

पहले 1 से 9 तक प्राकृतिक संख्याएं लिखिए। फिर उसके ठीक नीचे 9 से 1 तक घटते क्रम में लिखिए। तीसरी पंक्ति में दोबारा 1 से 9 तक और चौथी पंक्ति में पुनः 9 से 1 तक की संख्याएं लिखें। पांचवीं पंक्ति में सबसे दायीं ओर सिर्फ 2 लिख दें। अब इन्हें जोड़ दीजिए। मिल गई नं. 2 की एक लंबी कड़ी।

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	9	8	7	6	5	4	3	2	1
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	9	8	7	6	5	4	3	2	1
									2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

■ ■

4

गणित की विचित्र क्रियाएं

प्रमेय एक –

1. **क्या आप 2 = 1 सिद्ध कर सकते हैं? (बूलिअन लॉजिक)**

यह एक जाना-माना तथ्य है कि 2 के बराबर 1 नहीं होता, लेकिन आप इसे इस प्रकार सिद्ध कर सकते हैं–

माना कि क = ख

दोनों ओर से क से गुणा करने पर

$$क^2 = क\ ख$$

दोनों ओर से $ख^2$ घटाने पर

$$क^2 - ख^2 = क\ ख - ख^2$$

$$(क + ख)\ (क - ख) = ख\ (क - ख)$$

$$क + ख = ख$$

$$2ख = ख \quad \text{क्योंकि } क = ख$$

अत: 2 = 1 प्रमाणित हुआ।

(यहां क = ख मानना गलत है।)

प्रमेय दो -

2. **क्या आप 3 = 4 सिद्ध कर सकते हैं?**

3=4 नहीं होता, लेकिन यह सिद्ध करके आप अपने मित्रों को आश्चर्य में डाल सकते हैं।

हम जानते हैं कि −12 = −12

इसे इस प्रकार भी लिख सकते हैं: 9 - 21 = 16 - 28

$$(3)^2 - 7 \times 3 = 4^2 - 7 \times 4$$

$$(3)^2 - \frac{7}{2} \times 3 \times 2 = (4)^2 - \frac{7}{2} \times 4 \times 2$$

दोनों ओर $\left(\frac{7}{2}\right)^2$ जोड़ने पर

$$(3)^2 - \left(\frac{7}{2}\right) \times 3 \times 2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2 = (4)^4 - \frac{7}{2} \times 4 \times 2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2$$

$$\left(3 - \frac{7}{2}\right)^2 = \left(4 - \frac{7}{2}\right)^2$$

या $3 - \frac{7}{2} = 4 - \frac{7}{2}$

या 3 = 4

इस तथ्य का प्रयोग किसी भी प्राकृतिक संख्या के लिए किया जा सकता है। संख्याओं के ऑपरेशन में बूलिअन गणित एक समान अंक का अस्तित्व प्रत्येक तत्त्व के लिए होता है। कहने का तात्पर्य यह है कि प्रत्येक तत्त्व के लिए अन्य तत्त्व मिला एक समान तत्त्व होता है, जो दूसरे ऑपरेशन द्वारा प्राप्त होता है।

3. **बिना गणना किए जोड़ना**

पांच अंकों की कोई संख्या लिखने के लिए अपने मित्र से कहिए। उसी संख्या के नीचे आप पांच अंकों की एक और संख्या सोच कर लिखिए, ताकि प्रत्येक अंक का उसके ऊपर वाली संख्या के अंक के साथ योग 9 आए। उदाहरण के लिए-

मित्र की संख्या	=	45623
आपकी संख्या	=	54376

अब अपनी संख्या के नीचे पांच अंकों की एक और संख्या लिखने के लिए अपने मित्र से कहिए। माना कि वह लिखता है - 36258, तो आप भी ऊपर वाली बात को ध्यान में रखते हुए चौथी संख्या लिखें - 63741 । पांचवीं संख्या फिर अपने मित्र से लिखवाइए। जैसे ही वह पांचवीं संख्या लिखे, आप उसके नीचे एक रेखा खींच दीजिए और क्षण भर में पांचों संख्याओं का सही योग लिख दीजिए।

इस जोड़ को आप बायीं से दायीं ओर लिख सकते हैं। आप सिर्फ इतना कीजिए कि पांचवीं संख्या में से दो घटाकर अंक 2 अपने उत्तर के आगे लगा दें। जैसे - यदि पांचवीं संख्या 48765 है, तो पांचों संख्याओं का योग 248763 आएगा।

4. **किसी भी संख्या को 9999 ... से गुणा करने का तरीका**

किसी भी संख्या को 9,99,999,9999 .... से गुणा करने के लिए उस संख्या के आगे उतने शून्य लगा दीजिए, जितने गुणांक में 9 है। उत्तर में से संख्या घटा दीजिए। जैसे 345 × 99 = 34500 - 345 = 34155 या 75 × 9 = 750 - 75 = 675

5. **किसी संख्या को 5 से गुणा करना**

किसी संख्या को 5 से गुणा करने के लिए उस संख्या के इकाई वाले अंक के आगे '0' लगाएं और उत्तर में 2 से भाग दे दें। जैसे-

172 × 5 = 1720 ÷ 2 = 860

6. किसी संख्या को 125 से गुणा करना

किसी संख्या को 125 से गुणा करने के लिए उस संख्या के आगे तीन शून्य लगा कर 8 से भाग दे दीजिए।

जैसे - 89 × 125 = 89,000 ÷ 8 = 11125 होगा।

7. जादुई गुणा

अपने मित्र से एक कागज पर 123456789 लिखने के लिए कहें। फिर उससे कहें कि वह इनमें से एक को चुन ले। मान लिया कि वह 9 को चुनता है। अब आप 123456789 को 81 से गुणा करें। परिणाम होगा 999999999 । यदि आपका मित्र अंक 4 चुनता है, तो आप 36 से गुणा करें। परिणाम 444444444 होगा। आप का मित्र जो अंक चुने, उसे आप 9 से गुणा करके 123456789 से गुणा करें। आपको उसी अंक की श्रेणी मिलेगी।

8. किसी संख्या को 11 से गुणा करना

मान लीजिए कि आपको किसी संख्या में 11 से गुणा करना है, तो आप दायीं ओर से शुरू करें। पहले पहला अंक लिखें, फिर पहले और दूसरे अंक का योग लिखें। परिणाम को दहाई के स्थान पर लिख दें। अब दूसरे और तीसरे अंक का योग सैकड़ा के स्थान पर लिख दें। यदि अंक 9 से अधिक है, तो हासिल को दूसरे और तीसरे अंकों के योग में जोड़ दें। इस क्रम को अंत तक जारी रखते हुए सबसे बाद में अंत के अंक को ज्यों का त्यों लिख दें। उदाहरण के लिए- 345 × 11 के लिए पहले 5 लिखें, फिर 5 और 4 का योग लिख दें। इसके बाद 4 तथा 3 को जोड़ कर 7 और अंत में 3 लिख दें। इस प्रकार 345 × 11 = 3795 होगा। इसी प्रकार 8165 × 11 = 89815 और 397842 × 11 = 4376262 ।

9. 9 के पूर्णांकों का वर्ग

यदि आप ऐसी संख्या का वर्ग ज्ञात करना चाहते हैं, जिसमें सिर्फ अंक '9' हो, तो सबसे पहले दायीं ओर से 1 लिखें। फिर शून्य लिखें। शून्यों की संख्या 9 के अंकों से एक कम होना चाहिए। उसके बाद 8 लिखकर अंत में उतने 9 लगाइए, जितने शून्य हैं। उदाहरण के लिए - $999^2 = 998001$

इसी प्रकार $999999^2 = 999998000001$

10. 5 से समाप्त होने वाली संख्याओं का वर्ग

यदि आप ऐसी संख्या का वर्ग करना चाहते हैं, जिसके अंत में या इकाई के स्थान पर 5 हो (जैसे- 35, 45 आदि)। तो दायीं ओर से शुरू कीजिए- सबसे पहले 5^2 यानी 25 लिखें। अब अगले अंक को उस अंक से एक अधिक यानी उससे अगली संख्या से गुणा कीजिए। जैसे $35^2 = 35 \times 35 = 1225$ । सबसे पहले हमने 25 और फिर 12 लिखा, जो 3 × 4 या 3 × (3 +1) है।

इसी प्रकार $85^2 = 85 \times 85 = 7225$ और $45^2 = 2025$ होगा।

11. लगातार संख्याओं को जोड़ना

यदि आप लगातार पूर्णांकों को जोड़ना चाहते हैं, तो पहले और अंतिम पूर्णांक को जोड़ लीजिए। उत्तर को पूर्णांकों की संख्या के आधे से गुणा कर लीजिए। उदाहरण के लिए– $14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19 = (14 + 19) \times \frac{6}{2} = 99$

जिस प्रकार ऊपर 6 पूर्णांक थे, उसी प्रकार $40 + 41 + 42 + 43 + 44 + 45 + 46 + 47 + 48 + 49 = (40+49) \times \frac{10}{2} = 89 \times 5 = 445$ होगा।

12. क्रमागत विषम संख्याओं को जोड़ना

1 से 100 तक 50 विषम संख्याएं होती हैं। जैसे $1 + 3 + 5 + 7 \ldots\ldots + 99 = 50 \times 50 = 2500$

$1+3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 49$ होगा। ये गणितीय विषम संख्याएं हैं।

13. क्रमागत सम संख्याओं का योग

एक से अधिक संख्या के समूहों में गुणा करने पर हम इन संख्याओं को पा सकते हैं। 1 से 100 तक सभी सम संख्याओं को योग यानी $2 + 4 + 8 \ldots + 100 = 50 \times 51 = 2550$ होगा।

इसी प्रकार $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 = 8 \times 9 = 72$– ये संख्याएं सम संख्याओं की समानांतर श्रेणी में हैं, जिसका स्थिरांक 2 है।

14. किसी संख्या को 25 से गुणा करना

किसी संख्या को 25 से गुणा करने के लिए उस संख्या के आगे 2 शून्य लगा कर 4 से भाग कर दीजिए। उदाहरण के लिए, $53219 \times 25 = \frac{5321900}{4} = 1330475$ होगा।

विचार करने पर पता लगता है कि यदि x को 25 से गुणा करके 4 से भाग दें, तो $\frac{25}{4}x = 6.25x$ आएगा।

15. दो अंकों वाली किसी संख्या का वर्ग ज्ञात करना

उदाहरण के लिए, 86 का वर्ग निकालना ।

चरण - 1 संख्या के इकाई वाले अंक का वर्ग कर लें $(6)^2 = 36$, दायीं ओर 6 लिख कर हासिल 3 रखें।

चरण - 2 दोनों अंकों के गुणनफल को दुगुना कर लें और हासिल 3 जोड़ लें। जैसे – $2 \times 8 \times 6 = 96 + 3 = 99$ होगा। इकाई अंक 6 की बायीं ओर 9 लिखें। अब संख्या 96 हो गई, हासिल 9 लगाएं।

चरण - 3 संख्या के दहाई वाले अंक का वर्ग करके हासिल जोड़ दें और इस योग को पहले लिखी संख्या की ठीक बायीं ओर लिखें। जैसे- $(8)^2 = 64 + 9 = 73$ होगा। इसलिए $(86)^2 = 7396$ होगा।

उदाहरण के लिए - 53 का वर्ग

(1) $3 \times 3 = 9$ 9

(2) $2 \times 5 \times 3 = 30$ 09

हासिल 3

(3) $5 \times 5 = 25 + 3 = 28$ 2809

16. विभाजकता की जांच

क. यहां विभिन्न संख्याओं की विभाजकता परखने के कुछ सरल तरीके दिए जा रहे हैं।

ख. यदि संख्या की इकाई का अंक सम संख्या या शून्य है, तो उसमें 2 से पूरा-पूरा भाग हो जाएगा।

ग. यदि संख्या के समस्त अंकों के योग का विभाजन 3 से हो जाता है, तो वह संख्या भी 3 से विभाजित हो जाएगी।

घ. यदि संख्या के अंतिम दो अंकों में 4 से विभाजित हो जाते हैं, तो संख्या भी 4 से विभाजित हो जाएगी।

ङ यदि संख्या की इकाई का अंक 0 या 5 हो, तो वह संख्या 5 से विभाजित हो जाएगी।

च. यदि किसी सम संख्या के अंकों का योग 6 या 9 हो, तो वह संख्या 6 से विभाजित हो जाएगी।

छ. दायीं ओर से 3 अंकों के समूह बनाएं। एकांतर समूहों को जोड़ लें। इस प्रकार से प्राप्त दो समूहों के योग का अंतर ज्ञात करें। यदि अंतर शून्य है या 7 का गुणांक है, तो दी गई संख्या 7 से विभाजित हो जाएगी।

ज. यदि अंतिम 3 अंकों से बनी संख्या 8 से विभाजित हो जाती है, तो वह संख्या भी 8 से विभाजित हो जाएगी।

झ. यदि संख्या के समस्त अंकों का योग 9 या 9 का गुणक हो, तो वह संख्या 9 से विभाजित होगी।

ञ. यदि संख्या के अंत में शून्य है, तो वह संख्या 10 से विभाजित हो जाएगी।

ट. एक के अंतर से अंकों को जोड़ लें। यदि दोनों योगों का अंतर शून्य या 11

का गुणक है, तो संख्या 11 से विभाजित होगी।

ठ. दायीं ओर से तीन अंकों से समूह बनाइए। एक के अंतर पर समूहों में उपस्थित अंकों को जोड़ लें। प्राप्त दोनों योगों का अंतर यदि 0 है या 13 का गुणक है, तो संख्या 13 से विभाजित होगी।

17. घनमूल निकालना

आम तौर पर बच्चों को घनमूल निकालने में कठिनाई होती है। घनमूल (लौगरिथमिक) तरीके से या गुणनखंड विधि द्वारा निकाले जाते हैं। छह अंकों तक की संख्या का घनमूल आप इस प्रकार भी निकाल सकते हैं- यह तरीका सिर्फ परिपूर्ण घनों पर लागू होता है। छह अंकों की संख्या का घनमूल 2 अंकों का यानी एक इकाई का अंक और एक दहाई का अंक होगा। घनमूल निकालने के लिए इन तालिकाओं का प्रयोग किया जाता है। इकाई के अंक के लिए तालिका 'अ' देखें।

तालिका - अ

दी गई संख्या की इकाई का अंक	0123456789
उत्तर में इकाई का अंक	0187456329

तालिका 'ब' से दूसरे और तीसरे अंकों को छोड़कर अंत के तीन अंकों का परिणाम देखें।

तालिका - ब

अंत के तीन अंकों की संख्या

1 -8 -27 -64 -125 -216 -343 -512 -729 -

उत्तर में दहाई के अंक का मान 123456789 होगा।

कुछ उदाहरण इस प्रकार हैं-

क. 512 का घनमूल

512 की इकाई का अंक 2 है। तालिका 'अ' के अनुसार इकाई का अंक 8 होगा। इस संख्या में चौथे, पांचवें और छठे स्थान पर कोई अंक नहीं हैं। इसलिए उत्तर केवल एक अंक में ही होगा। इसीलिए 512 का घनमूल 8 है।

ख. 1728 का घनमूल

इसमें इकाई का अंक 8 है। तालिका 'अ' के अनुसार इकाई का अंक 2 होगा। चौथे स्थान का अंक 4 है। पांचवें और छठे स्थान पर कोई अंक नहीं है।

इसलिए 'ब' तालिका से दहाई का अंक 1 होगा।

इस प्रकार 1728 का घनमूल 12 होगा।

ग. 32768 का घनमूल

इस संख्या में इकाई का अंक 8 है। तालिका 'अ' से घनमूल का इकाई अंक 2 होगा। इसमें 3 और 2 अंक पांचवें और चौथे स्थान पर हैं। इसलिए तालिका 'ब' से घनमूल की दहाई का अंक 3 होगा। इसलिए 32768 का घनमूल 32 होगा।

घ. 753571 का घनमूल

इस संख्या में इकाई का अंक 1 है। तालिका 'अ' से घनमूल की इकाई का अंक भी 1 ही होगा। 753 के लिए घनमूल का दहाई अंक 9 होगा (तालिका 'ब')। इसलिए वांछित घनमूल 91 है।

इस विधि को प्रयोग में लाने से आप जल्दी ही इसमें सिद्धहस्त हो जाएंगे और अपने जीवन में इसका उपयोग कर सकेंगे।

18. दोहराए जाने वाली संख्या

समानांतर श्रेणी की संख्या प्रायः एक ही प्रकार के परिणाम देती है। हारमोनिक श्रेणी के लिए ऐसा नहीं होता।

उदाहरण-1

जब 111 को 12, 23,34 आदि से गुणा किया जाता है, यानी 11 के बढ़ते क्रम से, तब उत्तरों में 1221 का अंतर होता है।

इस प्रकार देखिए-

111 × 12 = 1332
111 × 23 = 2553 अंतर = 1221

111 × 34 = 3774
111 × 45 = 4995 अंतर = 1221

उदाहरण - 2

क्या आप जानते हैं कि 11, 111, 1111 आदि का वर्ग लेने पर उत्तर में अंकों की संख्या विषम होती है और उत्तर 1 से शुरू होकर संख्या के बीच तक लगातार बढ़ता है तथा उसी तरीके से घटना शुरू होता है?

11× 11 = 121
111 × 111 = 12321
1111 × 1111 = 1234321

उदाहरण - 3

यदि हम 11 को 2 दोहराती हुई संख्याओं, जैसे- 2, 22, 222, 2222 आदि से गुणा करें, तो उसके उत्तर की विशेषता यह होगी कि वह 2 से शुरू होगा तथा 2 पर ही समाप्त होगा और बीच के सभी अंक 4 ही आएंगे।

11 × 2 = 22

11 × 22 = 242

11 × 222 = 2442

11 × 2222 = 24442

19. गुणा करने का आसान तरीका

आप इस तरीके से दो अंकों वाली दो संख्याओं को गुणा कर सकते हैं। यदि दोनों संख्याओं की दहाई का अंक समान हो और इकाई के अंकों का योग 10 हो, तो आपको निम्नलिखित तरीका अपनाना होगा-

दहाई के अंक को उससे एक अधिक संख्या से गुणा करें और इकाई के स्थान वाली दोनों संख्याओं को आपस में गुणा करें। दोनों उत्तरों को उल्टे क्रम में बायें से दायें लिखें। आपको अपने गुणा का परिणाम मिल जाएगा।

उदाहरण-1

73 × 77

7 × 8 = 56

3 × 7 = 21

उत्तर है = 5621

उदाहरण-2

92 × 98

9 × 10 = 90

2 × 8 = 16

उत्तर है = 9016

उदाहरण-3

88 × 82

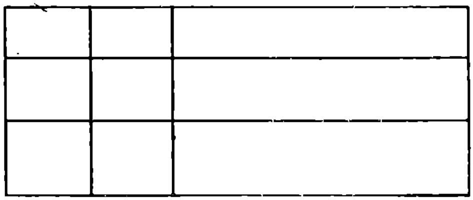
8 × 9 = 72

8 × 2 = 16

उत्तर है = 7216

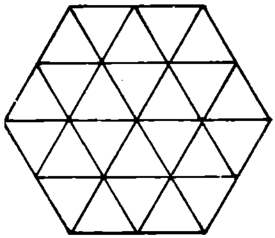
5
आकृतियों के खेल

1. चित्र 5.1 में कितने आयत दिए गए हैं ?



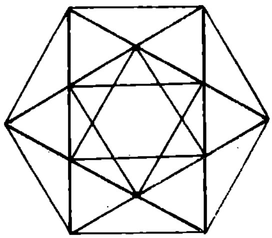
चित्र 5.1

2. चित्र 5.2 में कुल कितने त्रिभुज हैं?



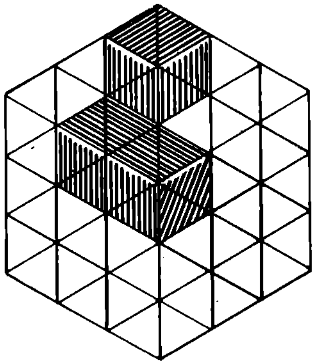
चित्र 5.2

3. चित्र 5.3 में कितने त्रिभुज हैं?



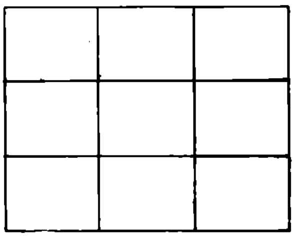
चित्र 5.3

4. चित्र 5.4 में कितने षट्कोण बने हुए हैं?



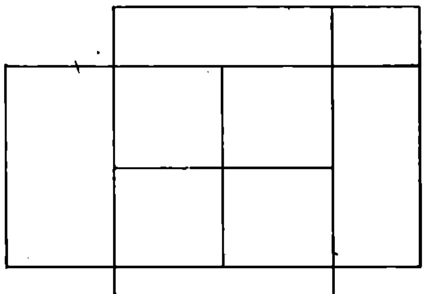
चित्र 5.4

5. चित्र 5.5 में कितने वर्ग हैं?



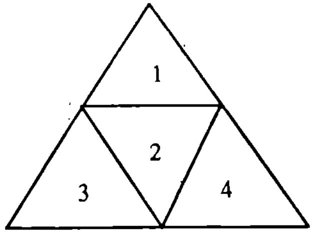
चित्र 5.5

6. चित्र 5.6 में कितने वर्ग हैं?



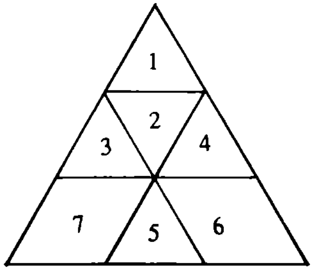
चित्र 5.6

7. चित्र 5.7 में कुल कितने त्रिभुज हैं?



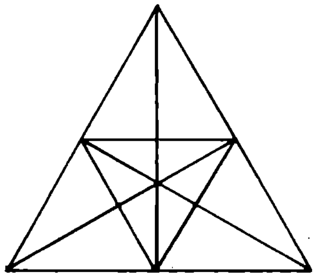
चित्र 5.7

8. चित्र 5.8 में कुल कितने त्रिभुज हैं?



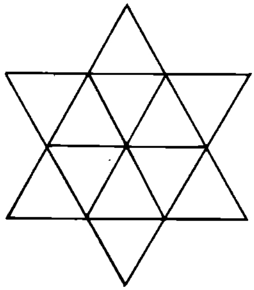
चित्र 5.8

9. चित्र 5.9 में कितने त्रिभुज हैं?



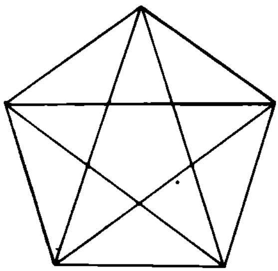
चित्र 5.9

10. चित्र 5.10 में दिए गए सितारे में कितने त्रिभुज हैं?



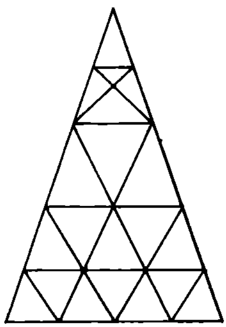
चित्र 5.10

11. चित्र 5.11 में कितने त्रिभुज हैं?



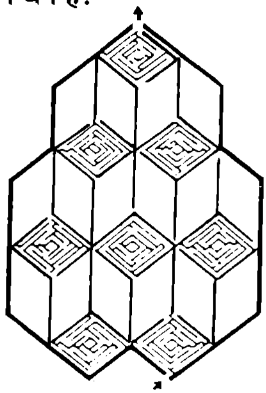
चित्र 5.11

12. चित्र 5.12 में कितने त्रिभुज हैं?



चित्र 5.12

13. चित्र 5.13 में कितने घन बने हैं?



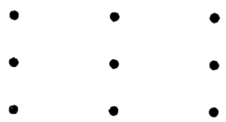
चित्र 5.13

14. 25 आमों को 12 लाइनों में इस प्रकार लगाइए कि प्रत्येक लाइन में 5 आम रखे जाएं।

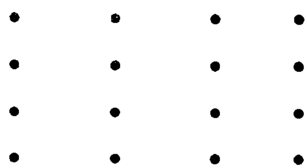
■ ■

6
बिंदुओं के खेल

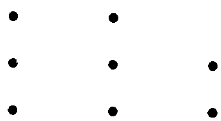
1. नीचे 9 बिंदु दिए गए हैं। इन्हें सरल रेखाओं से इस प्रकार जोड़िए कि ज्यादा-से-ज्यादा वर्ग बनें। बताइए, आप कितने वर्ग बना पाएंगे?



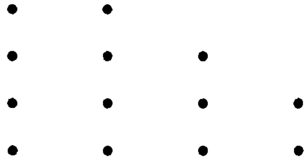
2. नीचे 16 बिंदु दिए गए हैं। इन्हें इस प्रकार जोड़िए कि ज्यादा-से-ज्यादा वर्ग बन सकें।



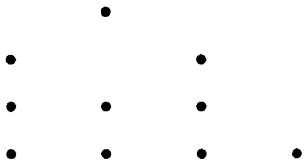
3. नीचे 8 बिंदु दिए गए हैं। इन्हें जोड़कर आप कितने आयत बना सकते हैं?



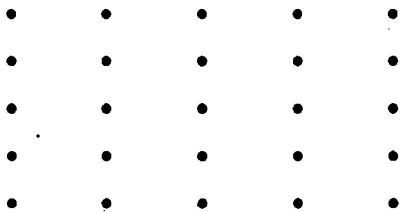
4. नीचे 13 बिंदु दिए गए हैं। इन्हें इस प्रकार जोड़िए कि अधिक-से-अधिक वर्ग बन सकें।



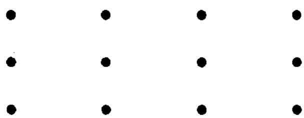
5. नीचे 10 बिंदु दिए गए हैं। इन्हें जोड़कर कितने सम त्रिभुज बनाए जा सकते हैं?



6. नीचे 25 बिंदु दिए गए हैं। बिना पेंसिल उठाए और एक बिंदु पर दुबारा पेंसिल फिराए इन बिंदुओं को 8 सरल रेखाओं से जोड़िए।

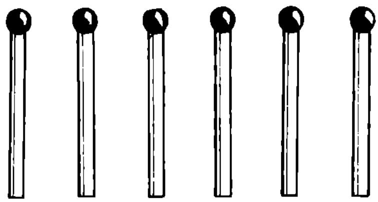


7. यहां 12 बिंदु दिखाए गए हैं। बिना पेंसिल उठाए 5 रेखाखण्ड खींचते हुए इन्हें जोड़िए।

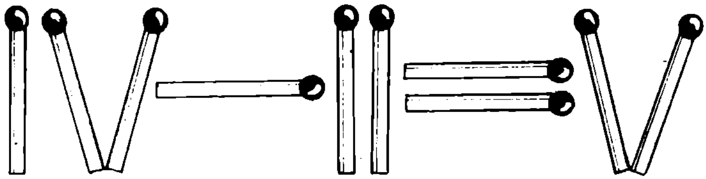


7
माचिस की तीलियों के खेल

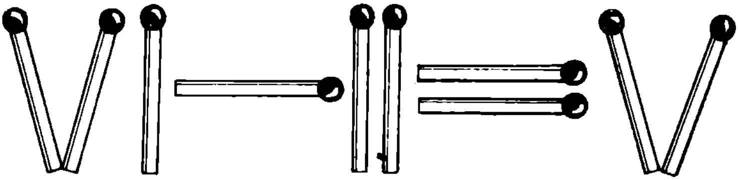
1. माचिस की 6 तीलियां लें। उन्हें इस प्रकार रखें, जैसे चित्र में दिखाया गया है। अब इनमें 5 तीलियां इस प्रकार जोड़िए कि 9 बन जाए।



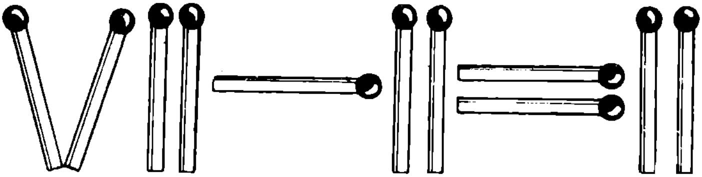
2. इस चित्र में रोमन अंकों में एक साधारण-सा योग दिया गया है। एक तीली को हटा कर इस प्रकार रखिए कि इस योग का उत्तर सही हो जाए।



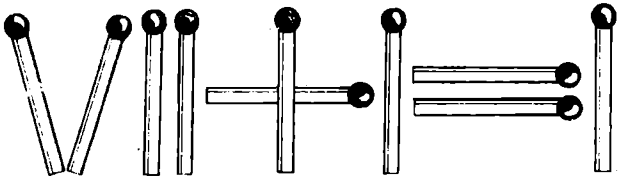
3. यहां भी रोमन अंकों में एक योग दिखाया गया है। एक और तीली का प्रयोग कीजिए तथा उसे ऐसे स्थान पर रखिए कि योग सही आए।



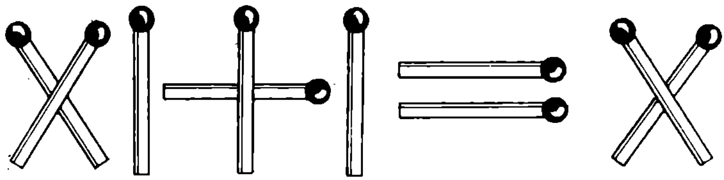
4. क्या आप इस चित्र में कोई 2 तीलियां खिसका कर योग को सही कर सकते हैं?



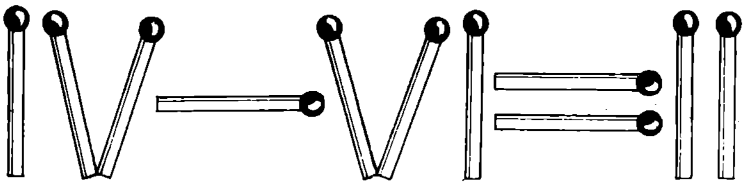
5. इस चित्र में से 3 तीलियां इस प्रकार हटाइए कि उत्तर सही आ सके।



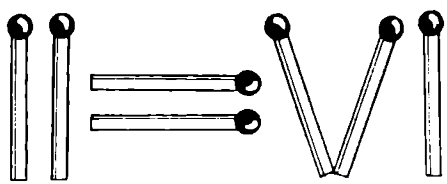
6. यहां भी रोमन अंकों का (प्रयोग करके) एक साधारण-सा योग दर्शाया गया है। कोई और तीली प्रयोग किए या निकाले बिना इसका उत्तर सही बनाकर दिखाइए।



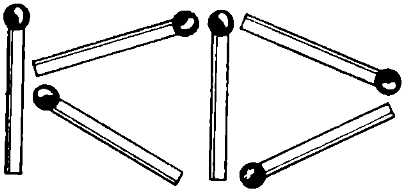
7. इस योग को सिर्फ एक तीली हिलाकर सही बनाइए व दिखाइए।



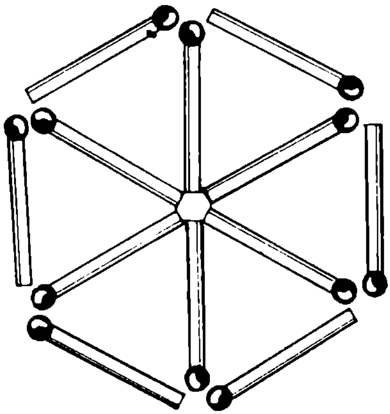
8. इस चित्र में सिर्फ एक तीली हिलाकर समीकरण सही कीजिए।



9. यहां 6 तीलियों का प्रयोग करके एक लैटिस दिखाई गई है। आप कोई 3 तीलियां उठाकर इस प्रकार रखें कि 6 समबाहु त्रिभुज बन जाएं।



10. इस चित्र में 12 तीलियां 6 समबाहु त्रिभुज बना रही हैं। कोई 4 तीलियां खिसकाकर 3 समबाहु त्रिभुज बनाइए।



11. 17 तीलियों का प्रयोग करके, जिनमें कोई टूटी तीली लगाए बिना, आप कितने त्रिभुज बना सकते हैं?

12. 12 तीलियों का प्रयोग करते हुए क्या आप किसी तल में एक ऐसी आकृति बना सकते हैं, जिसका क्षेत्रफल ठीक 3 तीलियों की लंबाई वाले वर्ग के क्षेत्रफल के बराबर हो?

■ ■

8

जादुई वर्ग

जादुई वर्ग में दी गई संख्याओं में विशेष बात यह होती है कि उन्हें लंबाई में जोड़ा जाए या चौड़ाई में या विकर्ण के साथ-साथ, उनका योग एक जैसा रहता है। वर्ग में 4, 9, 16, 25, 36 या 49 खाने होते हैं। यहां इस प्रकार के 2 उदाहरण दिए जा रहे हैं-

10	3	8
5	7	9
6	11	4

(क)

25	10	9	20
12	17	18	15
16	13	14	19
11	22	21	8

(ख)

जादुई वर्ग (क) का उत्तर 21 और (ख) का उत्तर 62 है, यानी प्रत्येक पंक्ति, कॉलम और वर्ग में दी गई संख्याओं का योग बराबर है। नीचे 9 और 16 खानों वाले दो मानक वर्ग दिए गए हैं-

8	1	6
3	5	7
4	9	2

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

इन दोनों वर्गों का प्रयोग करके हम दूसरे जादुई वर्ग बना सकते हैं। जादुई वर्ग दो प्रकार के होते हैं-

(i) वे जादुई वर्ग, जिनमें खानों की संख्या विषम होती है। जैसे-9, 25, 49 आदि।

(ii) वे जादुई वर्ग, जिनमें खानों की संख्या सम होती है। जैसे-16, 36, 64 आदि।

जादुई वर्गों की कहानी

जादुई वर्गों के विषय में यह चीनी कहानी मशहूर है कि कई सदी पहले येलो नदी से निकलकर एक कछुआ रेंगता हुआ जा रहा था। उसकी पीठ पर बड़ा विचित्र डिजाइन था, जिसमें धारियां और बिंदु थे। लोगों ने उन डिजाइनों को देखकर जादुई वर्ग बनाए, उन वर्गों में बिंदुओं के बराबर संख्याएं लिखीं। उन संख्याओं का योग सीधी रेखा में, खड़ी रेखा में और विकर्णों के साथ एक जैसा रहा। इसके बाद लोगों को जादुई वर्ग बनाने का शौक लग गया।



(i) विषम संख्या वाले जादुई वर्ग

माना कि हम 9 खानों वाला एक वर्ग बनाना चाहते हैं, जिसमें पंक्तियों, कॉलमों और विकर्णों में लिखे अंकों का योग 36 हो। ऐसे वर्ग में तीन पंक्तियां और तीन कॉलम होंगे। इसलिए केंद्रीय खाने की संख्या 36/3 = 12 होगी।

	12	

चूंकि वर्ग में 9 खाने हैं। इसलिए हमें 12 सहित 9 संख्याओं पर विचार करना होगा। ये संख्याएं होंगी 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16 । ये सभी समानांतर श्रेणी

में हैं। अब इन संख्याओं का प्रयोग करके हम सेट बनाते हैं। वे सेट भिन्न होंगे।

8 + 11 + 16 = 36 (i)

9 + 12 + 15 = 36 (ii)

10 + 12 + 14 = 36 (iii)

11 + 12 + 13 = 36 (iv)

ii, iii और iv में 12 बराबर आता है। इसलिए ये ही संख्याएं वर्ग में आएंगी। इस प्रकार विकर्ण बनेगा।

9		11
	12	
13		15

पहली पंक्ति के लिए दो संख्याएं 9 और 11 हैं। अत: तीसरी संख्या 16 होगी, क्योंकि तीनों का योग 36 होना चाहिए।

तीसरी पंक्ति की दो संख्याएं 13 और 15 हैं। अत: तीसरी संख्या 8 होगी, क्योंकि 13 + 8 + 15 = 36 होगा।

पहले और तीसरे कॉलमों का योग क्रमश: 22 और 26 है। अत: इनमें आने वाली संख्याएं क्रमश: 14 और 10 होंगी।

इसलिए हमारा वर्ग इस प्रकार होगा -

9	16	11
14	12	10
13	8	15

इस वर्ग में किसी भी तरह जोड़ने पर योग 36 ही आता है।

(ii) सम संख्या वाले जादुई वर्ग

सम संख्या वाले जादुई वर्ग बनाने की विधि विषम संख्या वाले खानों से कुछ कठिन व भिन्न है।

मान लिया कि हमें 1 से 16 तक की संख्याओं का प्रयोग करके 16 खानों वाला जादुई वर्ग बनाना है। इसके लिए हम सभी संख्याओं को खानों में इस प्रकार लिखते हैं-

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

यदि हम विकर्ण के साथ संख्याओं का क्रम उलट दें अर्थात् 1, 6, 11, 16 की जगह 16, 11, 6, 1 और 4, 7, 10, 13 की जगह 13, 10, 7, 4 लिख दें, तो हमें जादुई वर्ग प्राप्त हो जाएगा, जिसमें हर पंक्ति के क्रम और विकर्ण का योग 34 होगा। किसी प्रकार भी इन संख्याओं को आरोही अथवा अवरोही क्रम में गणितीय शृंखला के साथ रखें। स्थिरांक 5 ही होंगे।

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

इस वर्ग में संख्याएं एक समानांतर श्रेणी में बढ़ते या घटते क्रम में रहती हैं। यदि किसी निश्चित संख्या को जादुई वर्ग के प्रत्येक खाने में जोड़ या घटाकर विभाजित कर दिया जाए या गुणा कर दिया जाए, तो भी यह जादुई वर्ग ही रहेगा। इसका मान बदल जाएगा।

सामान्य शर्तों के साथ जादुई वर्ग बनाना

यदि कोई सामान्य शर्त दी हुई हो, तो हम इस प्रकार जादुई वर्ग बनाते हैं। उदाहरण के लिए- हमें 9 खानों वाला जादुई वर्ग बनाना है, जिसकी पंक्तियों, कॉलमों और विकर्णों का योग 42 हो और एक खाने में संख्या 15 हो, जैसा कि नीचे दिखाया गया है-

		15

9 खानों वाला मानक जादुई वर्ग इस प्रकार का होता है-

8	1	6
3	5	7
4	9	2

चूंकि एक खाने में 15 संख्या आनी हैं। अतः हम 15 को इस प्रकार लिख सकते हैं -

(1) $15 = 6 + 9$

(2) $15 = 6 \div 2 + 12$

(3) $15 = 6 \times 3 - 3$

(4) $15 = 6 \times \frac{5}{2}$

हर खाने में 9 जोड़ने पर

(i)

8 + 9	1 + 9	6 + 9
3 + 9	5 + 9	7 + 9
4 + 9	9 + 9	2 + 9

=

17	10	15
12	14	16
13	18	11

यह 42 का मानक वर्ग है।

(ii) यदि हम प्रत्येक संख्या को 3 से गुणा करके 3 घटा दें, तो हमें 36 योग वाला जादुई वर्ग प्राप्त हो जाएगा।

8 × 3 − 3	1 × 3 − 3	6 × 3 − 3
3 × 3 − 3	5 × 3 − 3	7 × 3 − 3
4 × 3 − 3	9 × 3 − 3	2 × 3 − 3

21	0	15
6	12	18
9	24	3

इसी प्रकार किसी शर्त के साथ 16 खानों वाले जादुई वर्ग भी बनाए जा सकते हैं।

उसके लिए हमें 16 खानों वाले मानक वर्ग का प्रयोग करना होगा। नीचे दी हुई शर्तों के साथ 16 खानों वाला एक वर्ग बनाना है।

25			
			32

मानक वर्ग है:

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

हर खाने में 20 जोड़ने पर हमें इस प्रकार एक नया जादुई वर्ग प्राप्त होता है:

36	22	23	33
25	31	30	28
29	27	26	32
24	34	35	21

इस जादुई वर्ग का स्थिरांक 114 है।

जादुई वर्ग-1

एक ऐसा जादुई वर्ग बनाइए, जिसका स्थिरांक 105 हो तथा उसमें 25 खाने हों। उसमें आने वाली कुछ संख्याएं इस प्रकार हों-

25				23
		21		
19				17

जादुई वर्ग-2

16 खानों वाला एक जादुई वर्ग बनाइए, जिसका स्थिरांक 150 हो और कुछ शर्तें इस वर्ग की भांति हों-

		31	
34			
	35		
			30

जादुई वर्ग-3

16 खानों वाला एक ऐसा जादुई वर्ग बनाइए, जिसका स्थिरांक 50 हो और उसमें 5 से 20 तक की संख्याओं का समावेश हो।

जादुई वर्ग-4

16 खानों वाला एक ऐसा जादुई वर्ग बनाइए, जिसका स्थिरांक 34 हो और उसमें नीचे दी गई संख्याओं का समावेश हो-

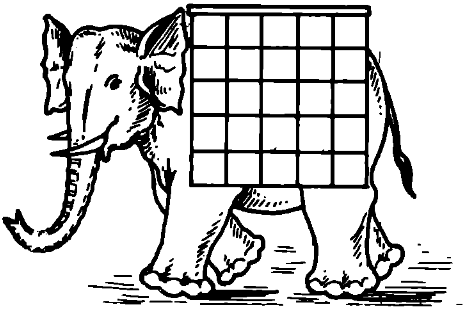
1			4
		6	
13			

जादुई वर्ग-5

5 ×5 का एक ऐसा जादुई वर्ग बनाइए, जिसका स्थिरांक 65 हो। इसे बनाने में 21 से 44 तक की संख्याओं का प्रयोग करना है।

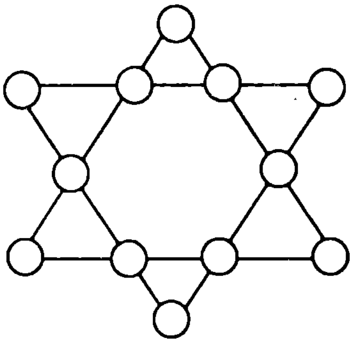
नासिक जादुई वर्ग

नीचे एक 5 × 5 का जादुई वर्ग दिया गया है। इसे 1 से 25 तक की संख्याओं से इस प्रकार भरें कि प्रत्येक पंक्ति, कॉलम और विकर्ण का योग 65 हो। अंक 1 वर्ग के केंद्रीय खाने में आना चाहिए।



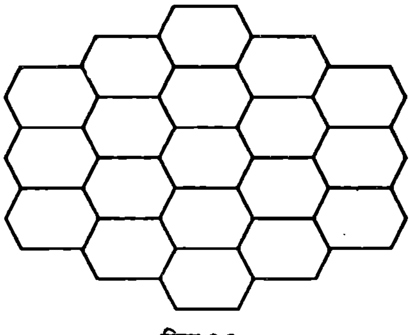
9
चित्रों में संख्या भरना

1. **जादुई तारा**
   चित्र 9.1 में दिए गए वृत्तों में 1 से 12 तक की संख्या इस प्रकार भरें कि प्रत्येक पंक्ति में उनका योग 26 आए। कोई भी संख्या 2 बार नहीं लिखें।



चित्र 9.1

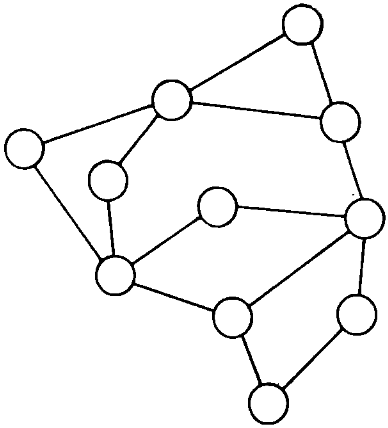
2. **मधुमक्खी का छत्ता**
   चित्र 9.2 में मधुमक्खियों का एक छत्ता दिखाया गया है। प्रत्येक खाने में 1 से 19 तक की संख्याएं इस प्रकार भरें कि प्रत्येक खाने की संख्या और उसके साथ वाले खाने की संख्या के बीच का अंतर 4 हो।



चित्र 9.2

3. जादुई चित्र

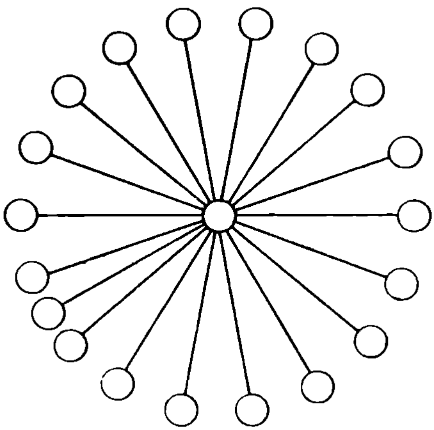
चित्र 9.3 के वृत्तों में 1 से 11 तक के पूर्णांक कुछ इस प्रकार भरें कि आपस में जुड़े किन्हीं तीन वृत्तों में लिखी संख्याओं के योग से 6 और 30 के बीच की संख्याएं प्राप्त हों।



चित्र 9.3

4. चक्र में संख्याओं का योग

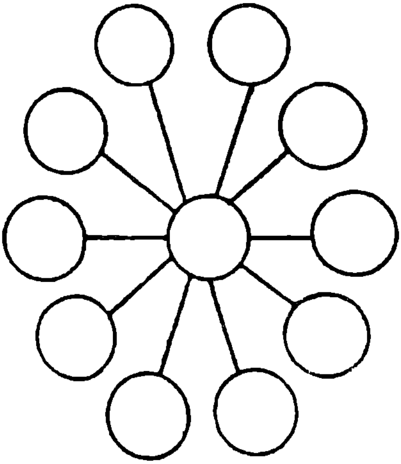
यहां 19 वृत्तों वाला एक छोटा चक्र दिया गया है। वृत्तों में 1 के 19 तक की संख्याएं इस प्रकार भरें कि किन्हीं 3 वृत्तों की एक सरल रेखा का योग 30 आए।



चित्र 9.4

5. जादुई वृत्त

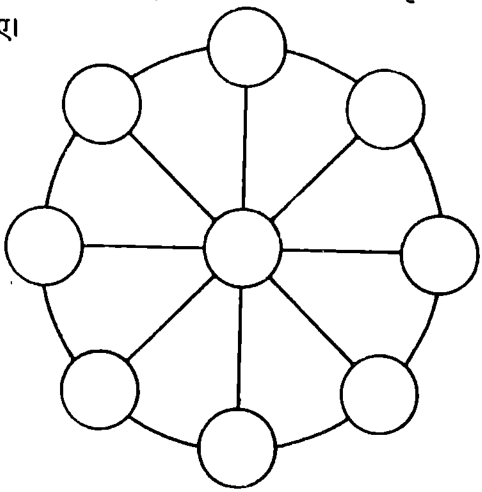
इस चित्र में दिए गए वृत्तों में 1 से 11 तक की संख्याएं इस प्रकार भरें कि प्रत्येक सरल रेखा के वृत्तों की संख्याओं का योग एक समान हो।



चित्र 9.5

6. संख्या-चक्र

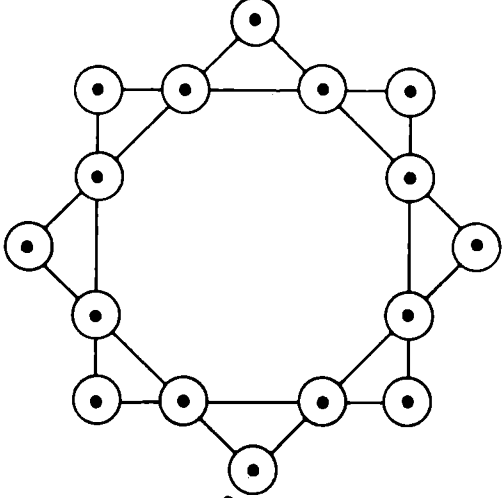
यहां एक संख्या-चक्र दिया गया है, जिसमें आपको 1 से 9 तक की संख्याएं वृत्त में इस प्रकार भरनी हैं कि एक रेखा में आने वाले तीन वृत्तों की संख्याओं का योग 15 हो जाए।



चित्र 9.6

7. 8 बिंदुओं वाला तारा

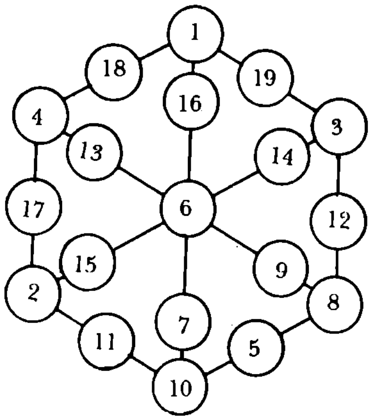
8 बिंदुओं वाले एक तारे में दिए गए वृत्तों में 1 से 16 तक की संख्याएं इस प्रकार भरें कि प्रत्येक रेखा के वृत्तों की संख्याओं का योग 34 आए।



चित्र 9.7

8. जादुई षट्कोण

नीचे दिए गए षट्कोण में 19 वृत्त हैं। इन वृत्तों में पहली 19 प्राकृतिक संख्याएं इस प्रकार भरें कि प्रत्येक रेखा के तीन वृत्तों या अर्द्ध व्यास के तीन वृत्तों की संख्याओं का योग 23 हो। इसे 2 तरीकों से हल करने का प्रयास करें।



चित्र 9.8

9. गायब संख्या

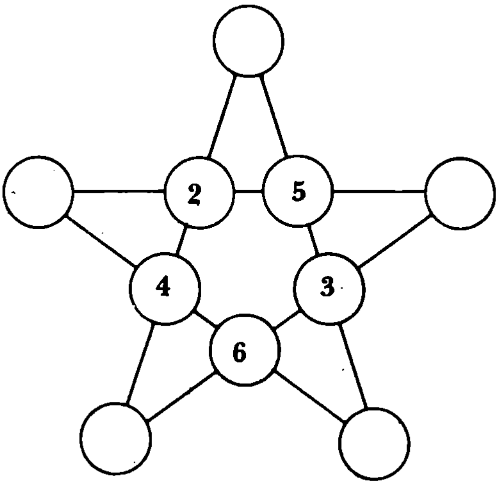
नीचे 3×3 वर्ग दिया गया है, जिसमें एक संख्या गायब है। क्या आप गायब संख्या बता सकते हैं?

7	3	10
9	5	22
?	2	12

चित्र 9.9

10. पंचतारा

चित्र 9.10 में दिए गए पंचतारे में 5 वृत्तों में कई संख्याएं दी गई हैं, लेकिन दूसरे 5 वृत्त खाली हैं। इन खाली वृत्तों में 5 अलग-अलग संख्याएं इस प्रकार भरें कि प्रत्येक रेखा की 4 संख्याओं का योग एक समान हो।

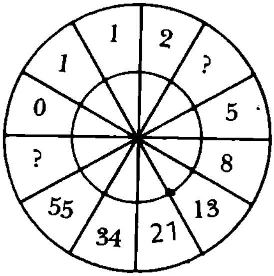


चित्र 9.10

11. जादुई वृत्त

चित्र 9.11 में दी गई वृत्ताकार आकृति में दो संख्याएं गायब हैं। संख्याएं एक निश्चित

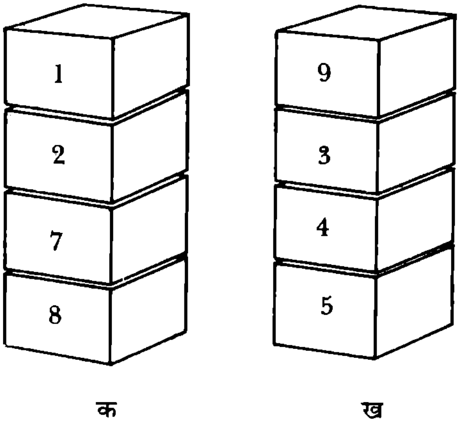
क्रम में हों, इस आधार पर रिक्त स्थानों को भरें।



चित्र 9.11

12. जादुई गति

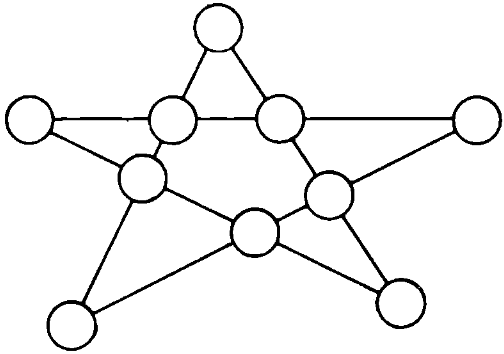
यहां 'क' और 'ख' - 2 ब्लॉक दिए गए हैं। प्रत्येक ब्लॉक में 4 अंक दिए गए हैं। एक ब्लॉक को इस प्रकार खिसकाइए कि दोनों ब्लॉकों में लिखी संख्याओं का योग समान हो जाए।



चित्र 9.12

13. विचित्र तारा

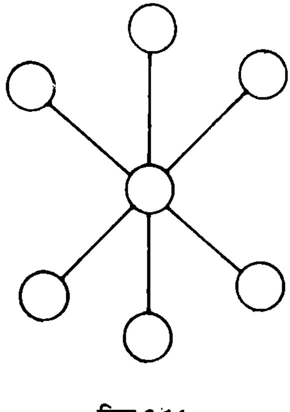
नीचे दिए गए जादुई तारे में संख्याएं इस प्रकार भरें कि पांचों रेखाओं की संख्याओं का योग 24 हो जाए। किसी भी संख्या का प्रयोग 2 बार न करें।



चित्र 9.13

14. लॉलीपॉप खेल

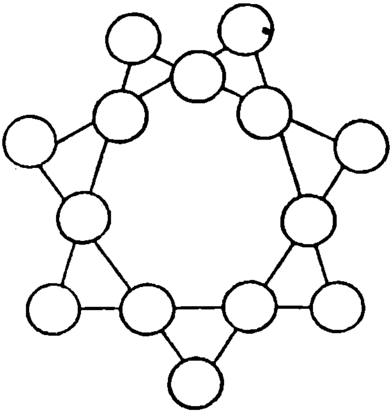
चित्र 9.14 में छह लॉलीपॉप दिखाए गए हैं। आप इनमें 1 से 7 तक की संख्याएं इस प्रकार भरें कि प्रत्येक सरल रेखा की 3 संख्याओं का योग 12 हो।



चित्र 9.14

15. **7 बिंदुओं वाला तारा**

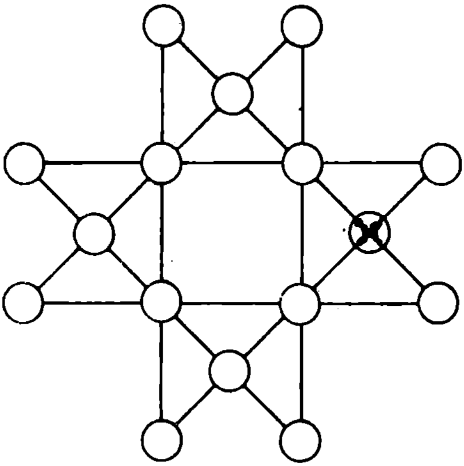
7 बिंदुओं वाले इस तारे में 1 से 14 तक की संख्याएं इस प्रकार भरें कि प्रत्येक रेखा के 4 वृत्तों की संख्याओं का योग 30 आए।



चित्र 9.15

16. **8 बिंदुओं वाला तारा**

आप 1 से 16 तक की संख्याएं इस प्रकार भरें कि हर रेखा के 4 वृत्तों की संख्याओं का योग 34 आए।



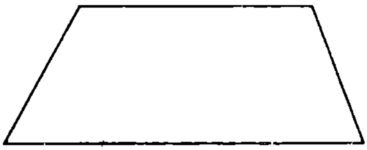
चित्र 9.16

10
अपने निर्णय का परीक्षण

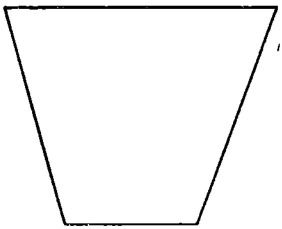
लंबी रेखा

'क' और 'ख' में सरल रेखाओं की तुलना किस प्रकार की जा सकती है?

क

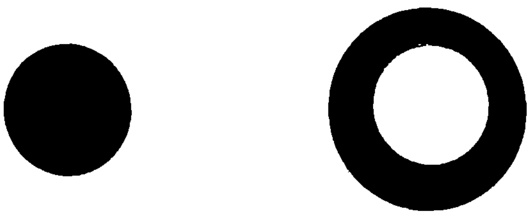


ख



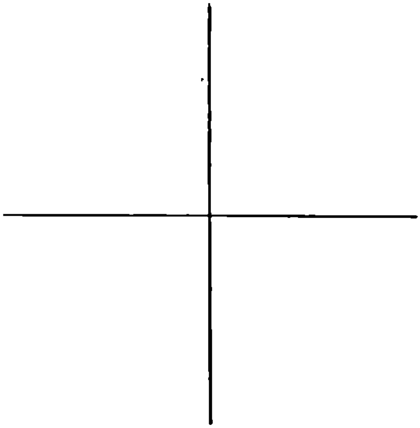
सफेद और काला

इनमें से कौन-सा वृत्त आकार में बड़ा है – सफेद या काला?



दो लंबवत् रेखाएं

इनमें से कौन-सी रेखा लंबी है- ऊर्ध्वाकार या क्षैतिज?



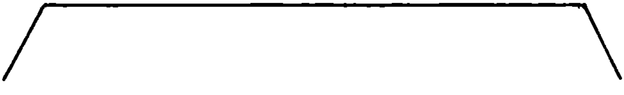
सबसे लंबी रेखा

'क', 'ख' और 'ग' में से कौन-सी सीधी रेखा सबसे लंबी है?

क



ख

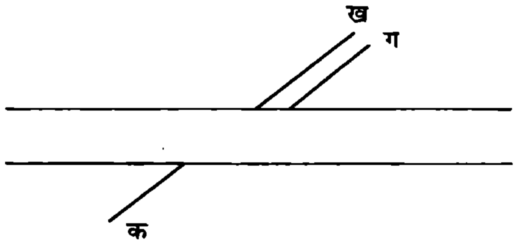


ग



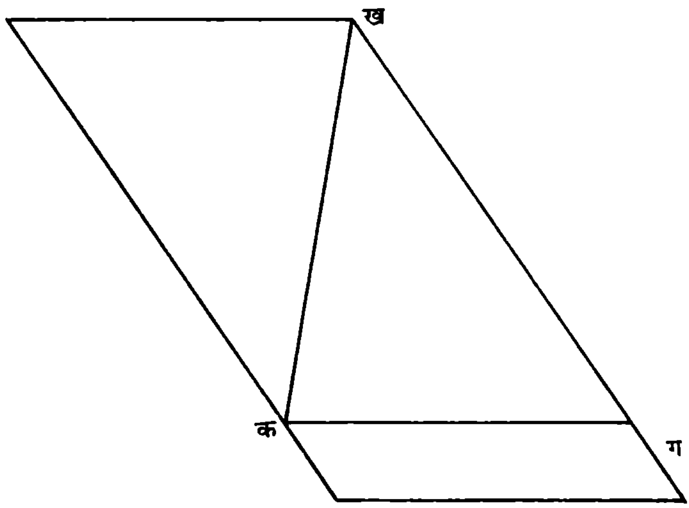
काटती हुई रेखाएं

'ख' और 'ग' में कौन-सी रेखा तिरछी रेखा 'क' की सीध में है?



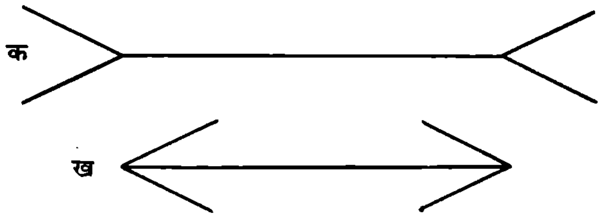
दो कर्ण

इनमें से कौन-सा कर्ण लंबा है- 'क ख' या 'क ग'?



आंखों का भ्रम

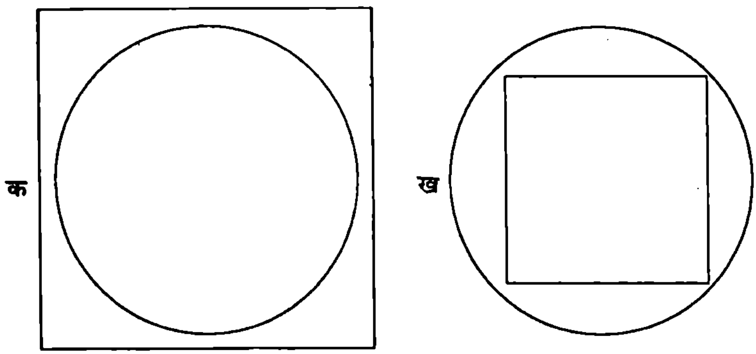
'क' और 'ख' में से कौन-सी रेखा ज्यादा लंबी है?



बड़ा वृत्त

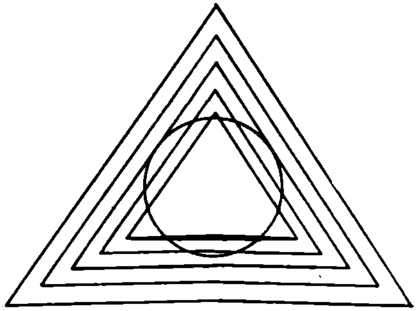
'क' और 'ख' में से कौन-सा वृत्त बड़ा है?

(मूल ज्यामिति का आधार एक वर्ग के भीतर बना वृत्त और एक वर्ग के चारों ओर बना वृत्त, थ्योरम ऑन सरकल्स ऐंड एप्लीकेशन्स, हॉल ऐंड नाइट्स ज्योमेट्री, पृ. 378, ब्लैकी संस्करण, लंदन)।



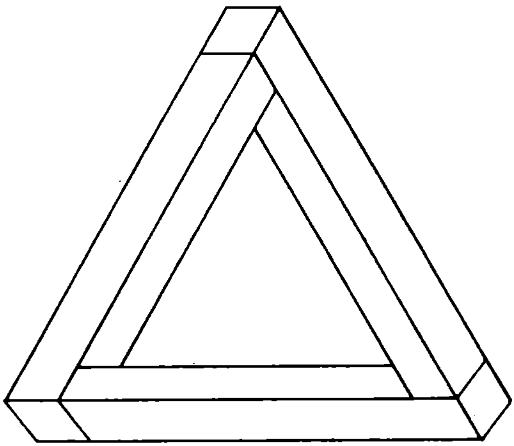
विकृत वृत्त

यह वृत्त विकृत क्यों दिखाई पड़ता है? (त्रिभुजों के अंदर बना वृत्त)



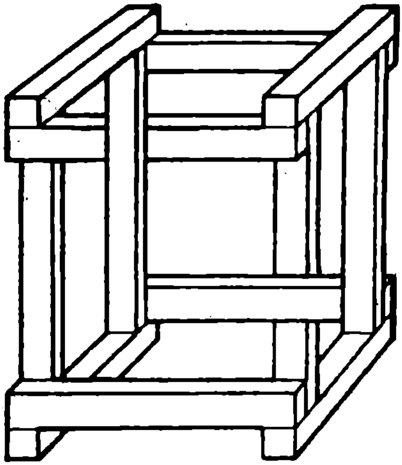
विचित्र त्रिभुज

इस लकड़ी के त्रिभुज को जरा देखें। इसे आप कागज पर तो बना सकते हैं, लेकिन कोई बढ़ई इसे नहीं बना सकता। अगर वह (बढ़ई) इस त्रिभुज की हूबहू नकल कर के चौकोर लकड़ी के टुकड़े से आकृति बनाता है, तो वह एकपक्षीय खाका की तरह होगा, जिसकी आकृति इस चित्र की तरह हूबहू नहीं होगी, क्योंकि यहां आंखों का भ्रम है।



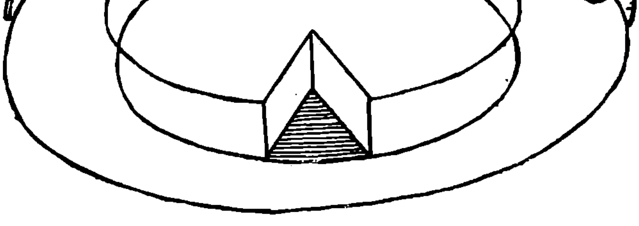
एक विचित्र फ्रेम

यह फ्रेम देखिए। ऐसा फ्रेम बनाने के लिए किसी बढ़ई से कहिए। कुशल से कुशल बढ़ई भी ऐसा फ्रेम नहीं बना पाएगा।



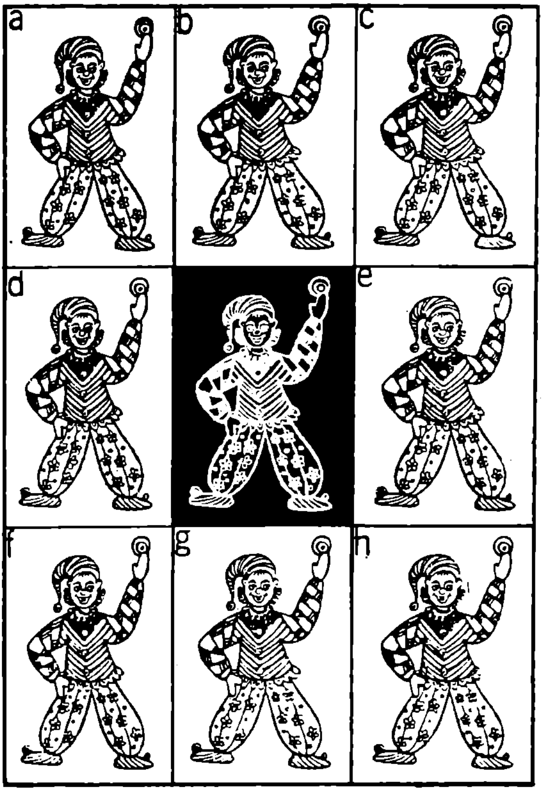
केक का खोया हुआ टुकड़ा

नीचे दिए गए चित्र में एक केक दिखाया गया है, जिसमें से एक तिकोना टुकड़ा गायब है। इस चित्र को उल्टा करके देखने पर आपको वह टुकड़ा मिल जाएगा। (आंखों का भ्रम)।



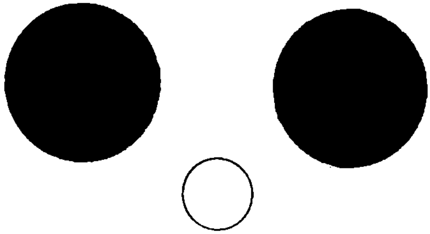
पॉजिटिव और नेगेटिव

नीचे दी गई आकृतियों के बीचोंबीच एक फोटोग्राफिक नेगेटिव दिखाया गया है। क्या आप बता सकते हैं कि इस नेगेटिव को विकसित करने पर जो पॉजिटिव बनेगा, वह यहां दी गई अन्य आकृतियों में से किसके जैसा होगा?



अदृश्य होता हुआ वृत्त

आप अपनी नाक सबसे नीचे दिए गए वृत्त के पास लाइए। ऊपर के काले वृत्तों में से एक वृत्त अदृश्य मालूम पड़ेगा।

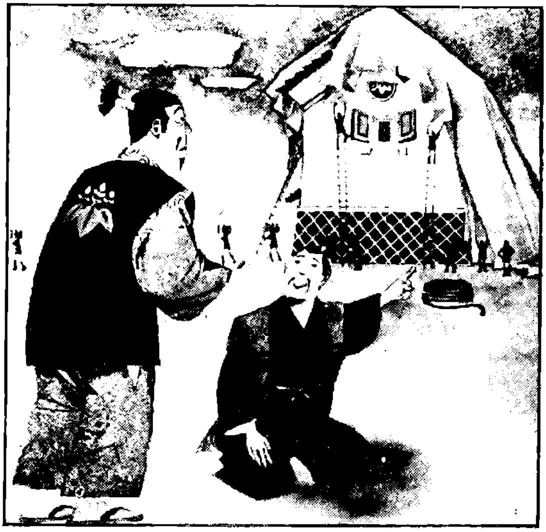


11

संख्याओं की आश्चर्यजनक कहानियां

1. चावल की कहानी

एक समय की बात है। जापान में टोयोटोमी हाइडेयोशी नामक एक शक्तिशाली जनरल का शासन था। वह सोरोरी नामक व्यक्ति को बहुत चाहता था। एक दिन जनरल ने सोचा, 'सोरोरी ने मुझे खुश करने के लिए जो प्रयास किया है, उसके लिए मैं उसे कोई उपहार दूं।' उसने सोरोरी से पूछा, "तुम क्या लेना पसंद करोगे?" सोरोरी ने उत्तर दिया, "हुजूर, आप मुझे आज चावल का एक दाना दे दीजिए। कल चावल के दो दाने, उससे अगले दिन चार दाने, फिर आठ दाने, इस प्रकार 31 दिनों तक चावल के दाने देने की कृपा करें।"



जनरल ने इसे एक बहुत ही छोटा-सा उपहार समझ कर मंजूर कर दिया। 31 वें दिन जब हाइडेयोशी ने देखा कि सोरोरी चावल के लिए कई बड़े थैले ले कर आया है,

तब वह हैरान रह गया। पूछने पर सोरोरी ने कहा, "हुजूर ! यह कपड़ा उन चावलों को बांधने के लिए है, जिन्हें देने का वचन आपने दिया था।"

यदि आप 1 + 2 + 4 + 8 + 16 .... इस प्रकार 31 तक जोड़ें, तो योग 2,14,74,83,649 अर्थात् 2 अरब 14 करोड़, 74 लाख 83 हजार 649 होगा। इतने दाने चावल रखने के लिए कई थैलों की आवश्यकता होगी। तो देखा आपने संख्याओं का कमाल!

2. भेड़ों का बंटवारा

एक समय की बात है। एक गड़रिया था। जब वह बूढ़ा हो चला और काफी बीमार पड़ गया, तो उसने अपने तीनों बेटों राम, श्याम और कृष्ण को बुलाया तथा कहा, "मेरे पास 17 भेड़ें हैं। अब से तुम लोग इन्हें संभालोगे। राम! तुम कुल भेड़ों का $\frac{1}{2}$, श्याम! तुम $\frac{1}{3}$ और कृष्ण! तुम $\frac{1}{9}$ हिस्सा ले लो। भेड़ों को इसी हिसाब से बांट लो, लेकिन कोई भी भेड़ मारनी न पड़े।" तीनों भाई असमंजस में पड़ गए कि 17



भेड़ों का बंटवारा, इस तरह कैसे किया जाए। वे घर के बाहर चबूतरे पर बैठ कर यही सोचने लगे। तभी एक बुद्धिमान व्यक्ति वहां से गुजरा। उन तीनों भाइयों को

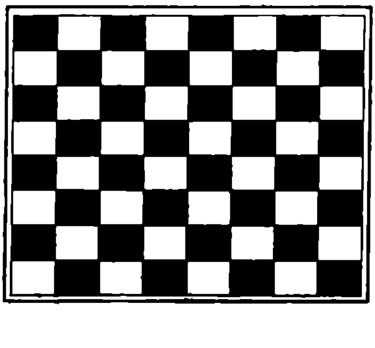
चिंतित देखकर उनसे उनकी समस्या सुनी। फिर वह बोला, "मैं तुम्हें अपनी एक भेड़ दे देता हूं। तुम अपनी समस्या हल कर लो।" उसकी यह बात सुन कर तीनों भाई खुश हो गए।

अब राम ने 18 भेड़ों का $\frac{1}{2}$ यानी 9, श्याम 18 भेड़ों का $\frac{1}{3}$ यानी 6 और कृष्ण ने 18 भेड़ों का $\frac{1}{9}$ यानी 2 भेड़ें ले लीं। इस प्रकार तीनों भाइयों ने 9 + 6 + 2 = 17 भेड़ें ले लीं और उस बुद्धिमान व्यक्ति को एक भेड़, जो उसी की थी, सौंप दी। है न आश्चर्य की बात! क्या आप बता सकते हैं कि उस बुद्धिमान व्यक्ति ने यह समस्या कैसे हल की? बूढ़े गड़रिये के अनुसार यह योग $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{17}{18}$ आता है। इसलिए 17 भेड़ों को 3 बेटों के बीच बांटा जा सकता है।

3. मुट्ठी भर अनाज

आप ने शतरंज खेलने वाला बोर्ड तो अवश्य देखा होगा। शतरंज रूस का राष्ट्रीय खेल है। इस बोर्ड पर चौकोर खानों की 8 पंक्तियां होती हैं और कुल मिलाकर 64 वर्ग बनते हैं, जिनमें से 32 काले होते हैं और 32 सफेद।

यदि कभी आपको किसी से कुछ मांगना हो, तो आप उससे मुट्ठी भर अनाज मांग लीजिए। उसे शतरंज वाला बोर्ड दीजिए और कहिए कि पहले खाने में 1 और दूसरे में 2 दाने रखें। इसी प्रकार हरेक खाने में रखें लेकिन प्रत्येक खाने में दानों की संख्या पिछले खाने से दुगुनी हो। जैसे तीसरे वर्ग में 4 दाने, चौथे वर्ग में 8 दाने, पांचवें वर्ग

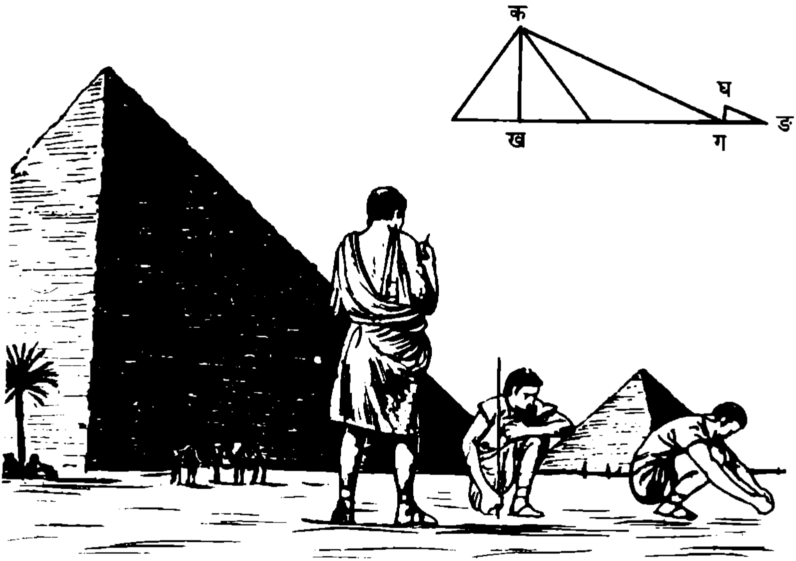


में 16 दाने आदि। क्या आप जानते हैं कि आखिरी वर्ग में कितने दाने रखने पड़ेंगे? इसका उत्तर है 2^{63} और कुल दानों की संख्या होगी $2^{64} + 1$ अर्थात्

1,84,46,74,40,90 48,67,67,615 होगी।

4. पिरामिड की ऊंचाई

मिस्र के पिरामिड बहुत प्रसिद्ध हैं। लगभग 2,500 वर्ष पूर्व मिस्र के राजा ने यह घोषणा की कि जो व्यक्ति पिरामिड की ऊंचाई मापकर दिखाएगा, उसे मुंहमांगा इनाम दिया जाएगा। थेल्स नामक एक यूनानी गणितज्ञ ने यह काम संभाला और एक छड़ी की छाया की मदद से पिरामिड की ऊंचाई मापकर लोगों को आश्चर्यचकित कर दिया। उस ने इस तथ्य का प्रयोग किया कि पिरामिड और उसकी छाया से बना एक बड़ा



त्रिभुज क ख ग और छड़ी और उसकी छाया से बना छोटा त्रिभुज घ ग ङ समरूप हैं। (चित्र) इस प्रकार

$$\frac{\text{क ख}}{\text{ख ग}} = \frac{\text{घ ग}}{\text{ग ङ}}$$

थेल्स ने ख ग, घ ग तथा ग ङ की लंबाई मापकर उनका प्रयोग समीकरण में किया और इस प्रकार पिरामिड की ऊंचाई क ख का पता लगाया।

5. सात पुल

कोनिंग्सबर्ग के प्रूसिअन शहर में प्रेगल नदी पर 7 पुल थे। काफी पुराने समय से ही लोग उन पुलों पर इस प्रकार गुजरने का प्रयास करते आ रहे थे कि किसी भी पुल पर उन्हें दोबारा न गुजरना पड़े, मगर कोई ऐसा कर नहीं सका।



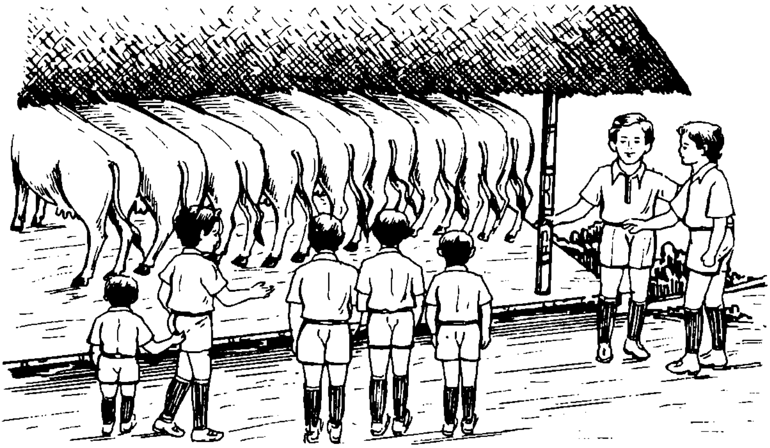
अंत में स्विट्जरलैंड के एक गणितज्ञ लिओनहार्ड इयुलर (1707-1783) ने यह सिद्ध किया कि यह कार्य असंभव है। उसने सरल रेखा की प्रकृति का अध्ययन किया। (वे पुल एक ऐसी सरल रेखा के रूप में थे, जिन्हें कागज पर बिना पेंसिल उठाए या दोबारा पेंसिल फिराए नहीं बनाया जा सकता था।) उसके बाद किसी ने पहले की तरह पुल पार करने की कोशिश नहीं की।

6. उनचास गायें

एक बूढ़े किसान के पास 49 गायें थीं और सात बेटे थे। उस किसान ने प्रत्येक गाय के लिए 1 से 49 तक नंबर रख दिए। उनकी गायों की यह विशेषता थी कि वे अपने नंबर के बराबर लिटर ही दूध देती थीं। जैसे- पहली गाय 1 लिटर, दूसरी गाय 2 लिटर आदि।

एक बार जब बूढ़ा बहुत बीमार पड़ गया, तब उसने अपने सातों बेटों को बुला कर कहा, ''तुम लोग इन गायों को आपस में बराबर-बराबर बांट लो, मगर हां, हर भाई

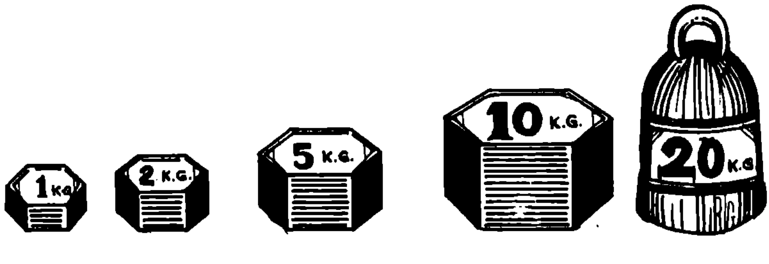
के पास बराबर मात्रा में दूध आना चाहिए।"



क्या आप उन गायों को इस प्रकार बराबर बांट सकते हैं कि प्रत्येक भाई को समान मात्रा में दूध मिले और गायों की संख्या भी समान हो।

7. बुद्धिमान दुकानदार

आम तौर पर दुकानदार एक से 40 किग्रा. तक भार मापने के लिए 1 किग्रा., 2 किग्रा., 5 किग्रा., 10 किग्रा., 20 किग्रा. और 40 किग्रा. के बट्टे प्रयोग करते हैं। लेकिन रामपुर में एक बहुत बुद्धिमान दुकानदार है जो 1 से 40 किग्रा. तक तौलने के लिए सिर्फ चार बट्टों का प्रयोग करता है।



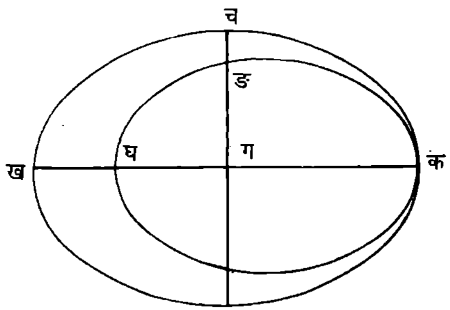
क्या आप बता सकते हैं कि वो कौन-से चार बट्टे हैं, जिनका यह दुकानदार प्रयोग करता है?

12

कुछ दिलचस्प उलझनें

1. एक, दो अंकों वाली संख्या के वर्ग को उस संख्या की आधी संख्या से भाग दिया गया। भागफल में 36 जोड़कर फिर से दो से भाग किया गया। इस प्रकार प्राप्त भागफल के अंक सबसे पहली संख्या के अंकों के समान हैं, सिर्फ उनका क्रम बदल गया है। पहली संख्या की दहाई के स्थान पर मौजूद संख्या दोनों अंकों के अंतर की दुगुनी है। बताइए, यह कौन-सी संख्या है?

2. चित्र में 2 दीर्घ वृत्तों (Ellipses) से बनी एक अर्द्ध चंद्राकार आकृति दिखाई गई है। बड़े दीर्घ वृत्त का केंद्र ग है। ख और घ के बीच अर्द्ध चंद्र की चौड़ाई 9 इंच है और ङ तथा च के बीच 5 इंच है। दोनों दीर्घ वृत्तों का व्यास क्या होगा?



चित्र 12.1

नोट :अर्द्ध चंद्र 2 वृत्तों से नहीं बनाया जा सकता, बशर्ते दोनों में कुछ असामान्यता हो, क्योंकि दोनों के व्यास और परिधि समान होते हैं।

3. रीता से जब उसकी उम्र पूछी गई, तो उसने शनिवार और रविवार के दिनों को छोड़कर अपनी उम्र 35 वर्ष बताया। बताइए, उसकी वास्तविक उम्र क्या है?

4. एक व्यक्ति का जन्म ईसा से 50 वर्ष पूर्व हुआ। ईसा से 50 वर्ष पश्चात् अपने जन्म दिन पर उसकी आयु कितनी होगी?

5. 2 बाप और 2 बेटे एक रेस्तरां में जलपान करने के लिए गए। जलपान का बिल 30 रु. आया। प्रत्येक व्यक्ति ने बराबर पैसे अदा किए। क्या तुम बता सकते हो कि काउंटर पर उन्होंने भुगतान कितना-कितना और कैसे किया?

6. एक तीर-कमान का मूल्य 21 रुपये है। कमान का मूल्य तीर से 20 रुपये अधिक है। दोनों का मूल्य कितना-कितना होगा?

7. एक पार्टी में आपस में हाथ मिलाने वालों की संख्या 28 है। आप बताइए कि उस पार्टी में कुल कितने मेहमान हैं?

8. क्या आप एक रुपये के खुदरा को इस प्रकार बांट सकते हैं कि उसके 50 सिक्के बनें, मगर कोई सिक्का 2 पैसे का न हो?

9. एक बंदर ने 30 फुट ऊंचे पेड़ पर चढ़ना शुरू किया। प्रतिघंटा वह 3 फुट ऊपर चढ़ता और फिर 2 फुट नीचे फिसल जाता। बताइए उसे सबसे ऊपर तक पहुंचने में कितना समय लगा।



चित्र 12.2

10. बाजार में एक फल की दुकान पर 8 केलों, 7 सेबों और 3 अंगूरों का भार 3 सेबों, 6 केलों और 6 अंगूरों के बराबर आता है। यदि एक केले का भार अंगूर के भार का दो-तिहाई भाग और एक दर्जन सेबों का भार 3 किग्रा. है, तो बताइए कि अंगूर का भार कितना होगा?



चित्र 12.3

11. पिछली शताब्दी (1800-1899) के एक विशेष वर्ष को यदि शीशे में देखा जाए, तो उसका संख्या-मान 4.5 गुना बढ़ जाता है। वह कौन-सा वर्ष था?

12. रमेश की गाड़ी का नंबर ऐसा है कि यदि उसे 2,3,4,5,6,7,8,9 और 10 से भाग दिया जाए, तो आपको क्रमश: 1,2,3,4,5,6,7,8 और 9 शेषफल प्राप्त होंगे, लेकिन 11 से भाग देने पर कुछ शेष नहीं बचता। क्या आप उस गाड़ी का नंबर बता सकते हैं?

13. 10 बिल्लियां 10 सेकंड में 10 चूहे खा जाती हैं। 100 सेकंड में 100 चूहों को खाने के लिए कितनी बिल्लियों की आवश्यकता पड़ेगी?

14. क्या आप कोई ऐसी संख्या सोच सकते हैं, जो अपने अंकों के घन के योग के बराबर हो?

15. वह कौन-सी संख्या है, जिसे सीधा या उल्टा करके पढ़ने पर कोई अंतर नहीं पड़ता?

16. एक लड़का हर 4 वर्ष बाद अपना जन्म दिन मनाता है। उसकी जन्म तिथि क्या है?

17. एक कार का नंबर 3 अंकों वाली संख्या है, जो किसी संख्या का वर्ग है। दूसरी कार का नंबर भी 3 अंकों का वर्ग है, लेकिन पहली कार का पहला अंक दूसरी कार का अंतिम अंक है। इन दोनों कारों के नंबर बताइए?

18. एक घड़ी की छोटी सुई 12 पर है और बड़ी तथा छोटी सुई के बीच 90° का कोण बन रहा है। बताइए कि घड़ी में कितना बज रहा है?

19. एक बिल्ली ने दूसरी बिल्ली से कहा कि उसके आगे 2 बिल्लियां हैं। दूसरी बिल्ली ने कहा उसके आगे और पीछे 1-1 बिल्ली है। तीसरी बिल्ली ने कहा कि उसके पीछे 2 बिल्लियां हैं। क्या आप बता सकते हैं कि कुल कितनी बिल्लियां थीं?

20. एक दुकानदार के पास 6 बाट हैं। उन्हें इकट्ठा करके वह 1 किलो से 364 किग्रा. तक का भार तौल सकता है। बताइए, वे बाट कितने-कितने के हैं?

21. क्या आप ऐसे कोई 3 अंक बता सकते हैं, जिनके घनों का योग करने पर ऐसी 3 अंकों वाली संख्या मिले, जो समान 3 अंकों से बनी है?

22. 6 बजे घड़ी की सुइयां एक-दूसरे से एकदम विपरीत होती हैं। ऐसा और किस समय होता है?

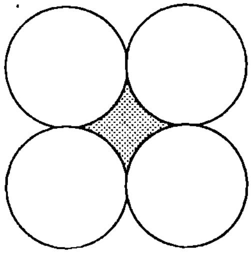
23. यदि शीशे में एक घड़ी का समय 3 बजने में 20 मिनट शेष दिखाई देता है, तो बताइए कि वास्तव में कितना बजा है?

24. इनमें से कौन-सा अधिक है- एक मील में इंचों की संख्या या एक हजार वर्षों में रविवारों की संख्या।

25. इनमें से कौन-सा अधिक है- एक सप्ताह में सेकंडों की संख्या या 100 मील में फुटों की संख्या?

26. वह कौन-सी एक अंक वाली संख्या है, जिसका घात 5 होने पर मान 32,768 आता है?

27. चित्र 12.4 में बिंदु वाले भाग का क्षेत्रफल क्या है, जबकि प्रत्येक वृत्त का व्यास 1 मीटर है?



चित्र 12.4

28. वह कौन-सी संख्या है, जिसमें 4 जोड़ने पर और उसे 4 से गुणा करने पर समान उत्तर आता है?

29. 1 से 2000 तक की सभी संख्याओं का योग क्या होगा?

30. ट्रैफिक लाइट के तीन रंगों को यदि एक-दूसरे के साथ मिला कर प्रयोग किया जाए, तो कितने संकेत प्रदर्शित किए जा सकते हैं? कम-से-कम एक रंग अवश्य दिखाई देना चाहिए।

31. यह दिखाइए कि क्रिकेट के 6 छक्के एक गुरुस (gross) के बराबर कैसे हो सकते हैं?

32. एक व्यक्ति 5 दिनों में 100 अंगूर खाता है। प्रतिदिन वह पिछले दिन खाए गए अंगूरों से 6 अंगूर अधिक खाता है। बताइए कि पहले दिन उसने कितने अंगूर खाए होंगे?

33. 3 बार अंक 9 का प्रयोग करके आप संख्या 1 को कैसे प्रदर्शित करेंगे?

34. एक कालीन का क्षेत्रफल 120 वर्ग फुट है और उसके एक कर्ण की लंबाई 17 फुट है। बताइए कि कालीन की लंबाई और चौड़ाई कितनी होगी?

35. यदि 8 व्यक्ति 32 दिनों में 16 गड्ढे खोदते हैं, तो 4 व्यक्तियों को 8 गड्ढे खोदने में कितना समय लगेगा?

36. वह कौन-सी संख्या है, जिसे 5 से भाग देने पर या उसमें से 5 घटाने पर समान उत्तर प्राप्त होता है?

37. जब आने वाले कल को हम बीता हुआ कल मान लें और आज रविवार के इतना नजदीक है जितना आज बीते कल के नजदीक था, जब बीता कल आने वाला था। यह कौन-सा दिन था?

38. वह कौन-सी संख्या है, जिसे 6 से गुणा करने पर या उसमें 6 जोड़ने पर समान उत्तर प्राप्त होता है?

39. 3 अंकों वाली वह कौन-सी संख्या है, जिसके पहले 2 अंकों का क्रम बदलने पर उस संख्या से 20% अधिक प्राप्त होता है?

40. कल से पहले दिन मैं 52 वर्ष का था। अगले साल मैं 55 वर्ष का हो जाऊंगा। क्या आप मेरी जन्म तिथि और वह तिथि बता सकते हैं, जब यह बात कही गई?

■ ■

13

गणित के कुछ और मनोरंजन

1. एक महिला एक दुकान में गई। वहां उसने एक महंगी कमीज और अंडरवियर खरीदे। कमीज का मूल्य अंडरवियर से 100 रुपये अधिक था। दोनों का मूल्य 150 रुपये था। प्रत्येक का मूल्य कितना था?

2. आटे के एक कनस्तर का वजन 19 किग्रा. था। एक तिहाई आटा प्रयोग करने के बाद कनस्तर और आटे का वजन 14 किग्रा. रह गया। बताइए कि कनस्तर का वजन कितना है?

3. 8 बजकर कितने मिनट समय हुआ है यदि 74 मिनट पहले यह सात बजने के बाद के कुल मिनटों का आधा था।

4. उस संख्या को बताइए, जो आपके मित्र ने सोची है-

   चरण-1 अपने मित्र से एक संख्या सोचने के लिए कहिए।

   चरण-2 इस संख्या में 7 जोड़ने से लिए कहिए।

   चरण-3 इसे 2 से गुणा करने के लिए और 4 घटाने के लिए कहिए।

   अपने मित्र से अब परिणाम पूछिए। अब इस परिणाम को 2 से भाग दे कर 5 घटाइए। आपको वह संख्या मिल जाएगी, जो आपके मित्र ने सोची थी।

   उदाहरण:

   चरण-1 मान लीजिए कि आपके मित्र ने 20 संख्या सोची थी।

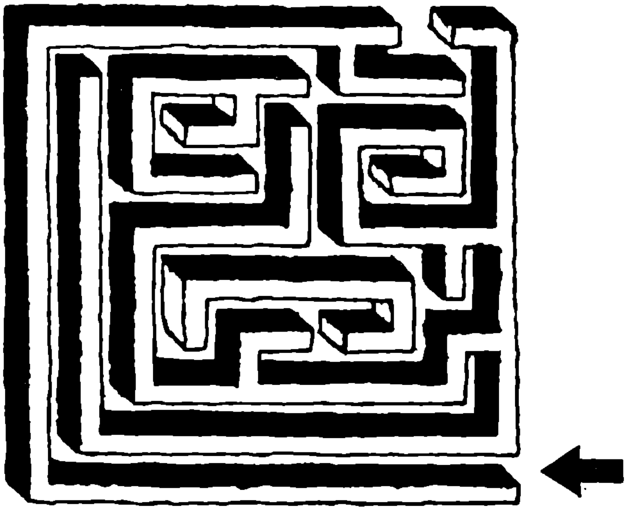
   चरण-2 7 जोड़ने पर यह संख्या 27 हो जाती है।

   चरण-3 2 से गुणा करने पर यह 54 हो जाती है।

   चरण-4 4 घटाने पर 54-4 = 50 हो जाती है।

   चरण-5 अब 50 को 2 से विभाजित करने पर 25 और उसमें से 5 घटाने पर 20 बचता है। यही संख्या आपके मित्र ने सोची थी।

5. चित्र 13.1 में एक सुंदर भूल-भुलैया दिखाई गई है। तीर की दिशा से प्रवेश करके क्या आप इससे बाहर आ सकते है?



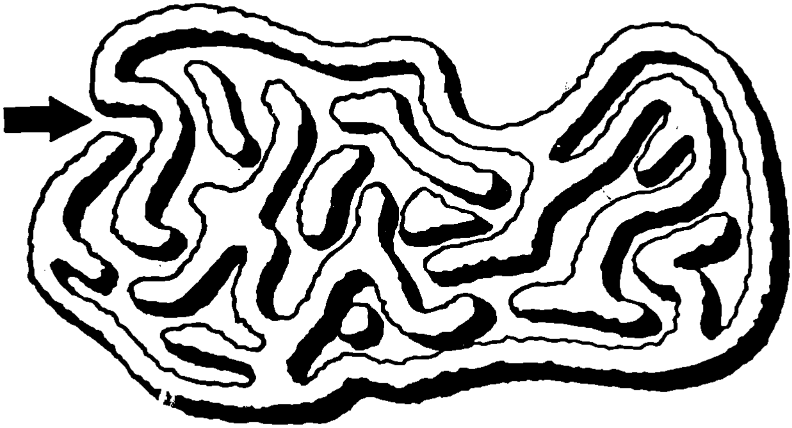
चित्र 13.1

6. चित्र 13.2 में एक वृत्ताकार भूल-भुलैया दिखाई गई है। तीर की दिशा से प्रवेश करके बाहर आने का प्रयास करें।



चित्र 13.2

7. चित्र 13.3 में एक टेढ़ी-मेढ़ी भूल-भुलैया दिखाई गई है। तीर के निशान की दिशा में प्रवेश करके क्या आप इससे बाहर निकल सकते हैं?



चित्र 13.3

8. नीचे दिए गए जादुई वर्ग को पूरा करें -

4		2
	5	
		6

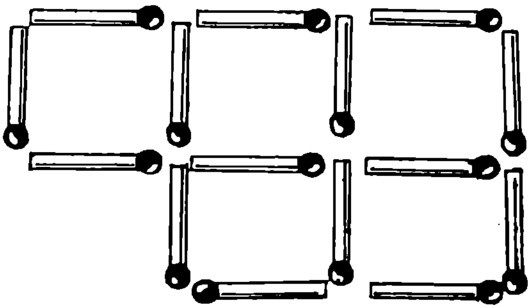
9. नीचे दिए गए जादुई वर्ग को इस प्रकार पूरा करें कि प्रत्येक पंक्ति, कॉलम और विकर्ण की संख्याओं का योग 33 हो जाए।

12	7	14
		9
8		10

10. 5 × 5 के इस जादुई वर्ग को पूरा करें

15	8	1	24	17
16		7		23
	20		6	4
3	21	19	12	
9	2	25	18	11

11. नीचे के चित्र में माचिस की 15 तीलियां दिखाई गई हैं। इन्हें 6 वर्गों में सजाया गया है। 3 तीलियां हटा कर 6 वर्गों को 3 वर्गों में परिवर्तित करें-



चित्र 13.4

12. एक ही प्रकार के 6 सिक्के लेकर नीचे दिए गए चित्र की भांति सजाएं। इनमें से केवल 3 सिक्कों को खिसका कर 2 लाइनों को वृत्त में बदलें। ध्यान रहे, एक बार में एक ही सिक्का खिसकाना है।



चित्र 13.5

13. किसी सिक्के पर अंकित वर्ष को बताना

अपने मित्र से कहिए कि वह अपनी जेब से एक सिक्का निकाले। फिर उस से पूछिए कि उस पर अंकित वर्ष का तीसरा अंक क्या है।

- इस अंक का दुगुना करें।
- इसमें 5 जोड़ें।
- प्राप्त परिणाम को 5 से गुणा करें।
- इस परिणाम में अंकित वर्ष का अंतिम अंक जोड़ें।
- योग में से 25 घटाएं।

परिणाम सिक्के पर अंकित वर्ष जितना ही होगा।

उदाहरण:

मान लीजिए कि सिक्के पर अंकित वर्ष 1985 है।

इसका तीसरा अंक 8 है।

इसका दुगुना हुआ 16 ।

5 जोड़ने पर 16 + 5 = 21

21 का 5 गुना = 105 ।

अब 105 में अंतिम अंक 5 जोड़ने पर - 110

अब 110 में से 25 घटाने पर 85। इस प्रकार सिक्के पर अंकित वर्ष 85 है।

14. क्या आप निम्नलिखित समस्या का उत्तर बता सकते हैं?

राम और श्याम जर्मन और फ्रेंच भाषा सीखते हैं। श्याम और कमल फ्रेंच तथा इटालियन भाषा सीखते हैं। विनोद रूसी और जर्मन भाषा सीखता है। राम भी रूसी भाषा सीखता है।

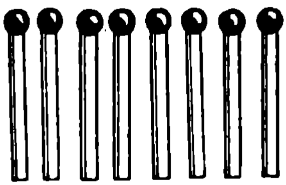
(क) इनमें से कौन-कौन जर्मन सीखते है, परंतु फ्रेंच नहीं?

(ख) श्याम कौन-सी भाषा नहीं सीखता है?

(ग) कौन-कौन जर्मन, फ्रेंच और इटालियन सीखते हैं?

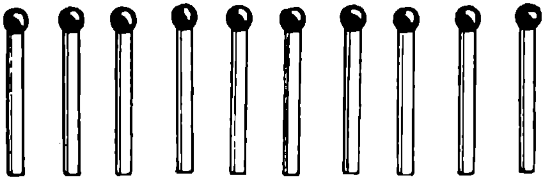
(घ) कौन-कौन रूसी सीखते हैं, किंतु, फ्रेंच नहीं सीखते?

15. आपके पास माचिस की 8 तीलियां हैं। इनसे 'SIX' कैसे लिखेंगे?



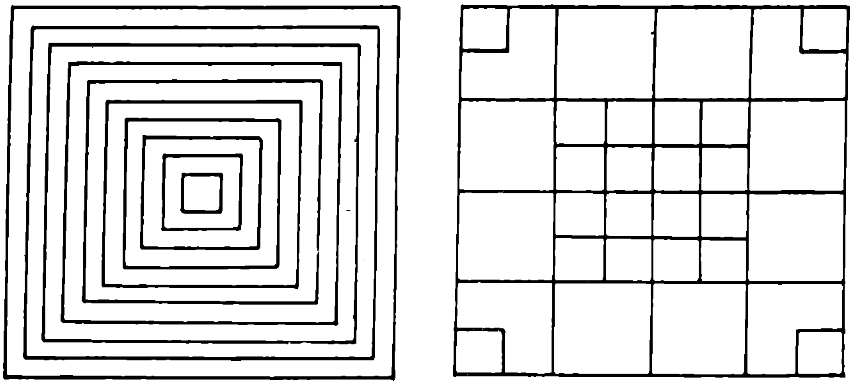
चित्र 13.6

16. आपके पास माचिस की 10 तीलियां हैं। इनसे 'Five' किस प्रकार लिखेंगे?



चित्र 13.7

17. नीचे दिए गए 2 चित्रों में से किस चित्र में वर्गों की संख्या अधिक है?



चित्र 13.8

18. आपका उत्तर हमेशा ही 10 होगा

- अपने मित्र से एक संख्या सोचने के लिए कहिए।
- इसमें 9 जोड़ने के लिए कहिए।
- इसका दुगुना करने के लिए कहिए।
- इसमें 3 जोड़ने के लिए कहिए।
- अब इसे 3 से गुणा करने के लिए कहिए।
- अब इसमें से 3 घटाने के लिए कहिए।
- इसे 6 से भाग देने के लिए कहिए।
- सोची हुई संख्या इसमें से घटाने के लिए कहिए।
- उत्तर 10 होगा।

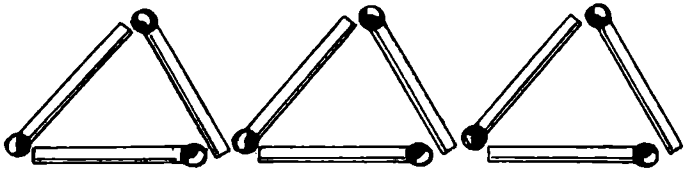
उदाहरण:

- माना कि आपके मित्र ने संख्या 8 सोची।
- इसमें 9 जोड़ने पर 17 संख्या मिली।

- 17 का दुगुना हुआ 34 ।
- इसमें 3 जोड़ने पर 34 + 3 = 37
- इसमें 3 का गुणा करने पर = 37 × 3 = 111
- इसमें से 3 घटाने पर = 111 - 3 = 108
- इसे 6 से भाग देने पर = 18
- इसमें से मूल संख्या घटाने पर 18 - 8 = 10

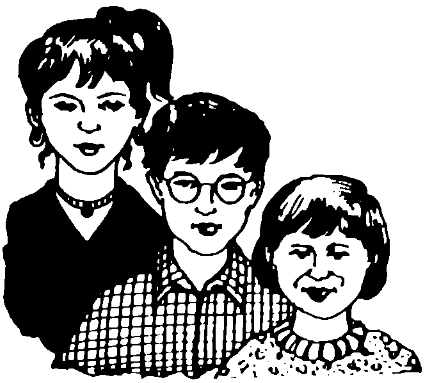
इसलिए उत्तर हमेशा 10 ही होगा।

19. नीचे दिए हुए 3 त्रिभुजों में से केवल 3 तीलियों को हिला कर के 5 त्रिभुज बनाइए।



चित्र 13.9

20. जब मेरी उम्र इतनी होगी, जितनी अब मेरे भाई की है, तब मेरी बहन की उम्र उस समय की मेरी उम्र से 3 वर्ष अधिक होगी और मेरे भाई की उम्र मेरी बहन की उम्र से 12 वर्ष अधिक होगी। यदि हमारी उम्रों का योग अभी 57 वर्ष है, तो हम प्रत्येक भाई-बहनों की उम्र कितनी है?



चित्र 13.10

21. मेरे पिता जी की उम्र मुझसे 21 वर्ष अधिक है। 12 वर्ष बाद उनकी उम्र मेरी उम्र से दुगुनी हो जाएगी। बताइए कि इस समय मेरी उम्र कितनी है।

22. यदि मेरी बहन की उम्र 21 वर्ष है और उसकी उम्र मेरी उम्र से 8 वर्ष अधिक है, मेरे भाई की उम्र 15 वर्ष है और उसकी उम्र मेरी उम्र से 2 वर्ष अधिक है, तो बताइए कि मेरी उम्र क्या है?

23. 2 माताएं और 2 पुत्रियां एक दुकान में गईं। उन्होंने 6 रुपये खर्च किए। यदि उन सबने बराबर पैसे खर्च किए, तो प्रत्येक ने कितना खर्च किया?

24. 4 वर्ष बाद सीता की उम्र अब से 11 वर्ष पहले की उम्र से दुगुनी हो जाएगी। बताइए कि अभी सीता की उम्र क्या है?

25. 2 बार 3 का प्रयोग करके क्या आप 20 बना सकते हैं?

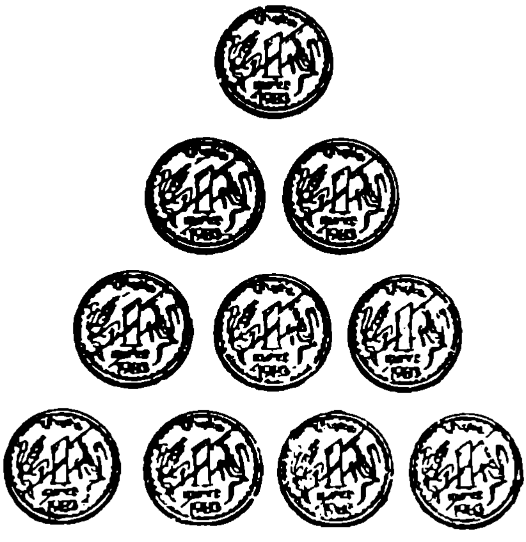
26. 4 बार 6 का प्रयोग करके क्या आप 100 बना सकते हैं?

27. 8 बार 8 का प्रयोग करके क्या आप 1000 बना सकते हैं?

28. प्रत्येक अक्षर के लिए उचित अंक दीजिए-

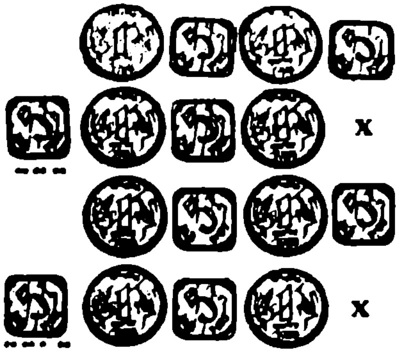
क	ख	ग
- 4	5	9
ग	क	ख

29. चित्र की भांति 10 सिक्के रखें। 3 सिक्कों को खिसकाकर इस पिरामिड को उल्टा बनाए।



चित्र 13.11

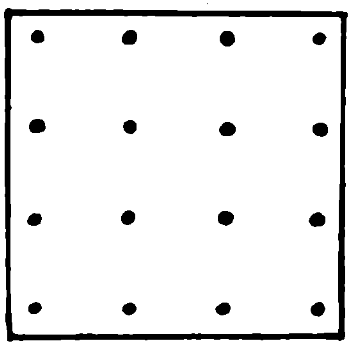
30. नीचे दिए गए चित्र की भांति 16 सिक्कों को रखें। अब उन्हें इस प्रकार व्यवस्थित करें कि वे एकांतर क्रम में ऊर्ध्वाकार और क्षैतिज रूप में आ जाएं। आप केवल 2 सिक्कों को ही छुएं।



चित्र 13.12

31. यदि एक अंडे को उबालने में 4 मिनट लगते हैं, तो तीन अंडों को उबालने में कितना समय लगेगा?

32. नीचे चित्र में 16 बिंदु दिए गए हैं। इन्हें 6 सीधी रेखाओं से इस प्रकार जोड़ें कि आपको कागज से अपनी पेंसिल न हटानी पड़े।

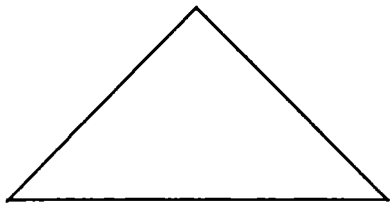


चित्र 13.13

33. किन 2 अंकों को आपस में गुणा करने पर परिणाम 7 होगा?

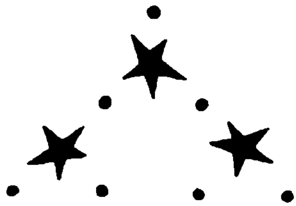
34. 100 वर्गमीटर क्षेत्रफल के वृत्त को समान क्षेत्रफल के वर्ग में परिवर्तित करें।

35. नीचे दिए गए चित्र में त्रिभुज को 3 हिस्सों में विभाजित करके 2 पूर्ण वर्गों की रचना कीजिए।



चित्र 13.14

36. सभी बिंदुओं को जोड़ते हुए सरल रेखाएं इस प्रकार खींचें कि चित्र में दिखाए गए 3 तारे 3 वर्गों के अंदर आ जाएं।



चित्र 13.15

37. वह कौन-सी संख्या है, जो 3 बढ़ाने पर 12, 15, 18 और 24 से पूरी विभाजित हो जाती है?

38. किसी संख्या और उनके वर्गमूल का अंतर 90 है। वह संख्या बताइए।

39. 30 को आधे से विभाजित करके और फिर 30 घटाने पर क्या परिणाम आएगा?

40. यदि आप 60 को आधे से विभाजित करके उसमें 40 जोड़ दें, तो क्या परिणाम प्राप्त होगा?

41. X का मान बताएं

2	1	8	5	9
3	7	2	6	2
4	2	1	1	X

42. **निम्नलिखित सूत्र में X का मान दें**

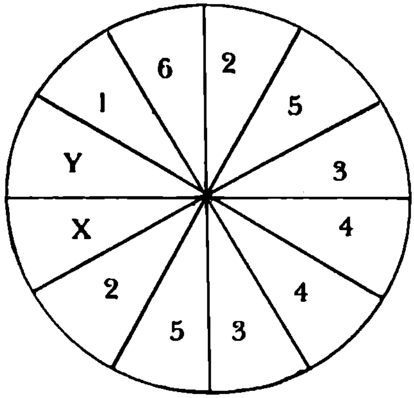
31 31 X 31

43. **X और Y का मान बताएं**

7 8 6 9 5 10 X Y 3 12

44. एक कागज के टुकड़े पर 37 लिखें और उसे अपनी जेब में रख लें। किसी दूसरे को कोई वैसा नंबर बताने के लिए कहें, जो 3 एक समान की संख्या से बने। उन तीनों संख्याओं को जोड़ें और उससे मूल संख्या में भाग दें। जो अंक आएगा, वही उत्तर होगा।

45. **X और Y क्या है?**



■ ■

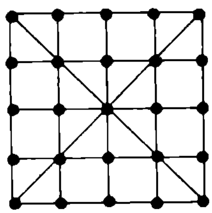
उत्तर

अध्याय- 5

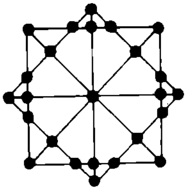
1. 36
2. 38
3. 76
4. 27
5. 14
6. 11
7. 5
8. 13
9. 47
10. 20
11. 35
12. 48

13. ऊपर के परछाईं वाले भाग में 6 घन हैं, जबकि नीचे का भाग 7 घन दर्शाता है।

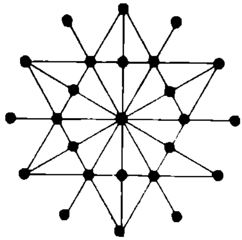
14. 25 आमों को 12 पंक्तियों में तीन प्रकार से व्यवस्थित किया जा सकता है, जैसे चित्र 5.14, 5.15 और 5.16 में दिखाया गया है।



चित्र 5.14



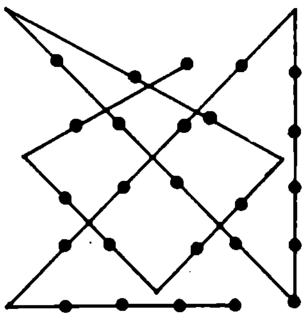
चित्र 5.15



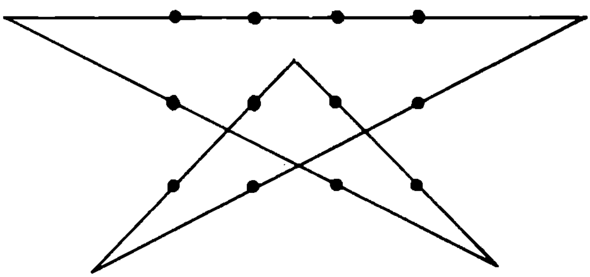
चित्र 5.16

अध्याय-6

1. 6
2. 20
3. 5
4. 15
5. 15
6.

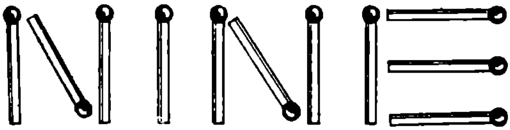


7.

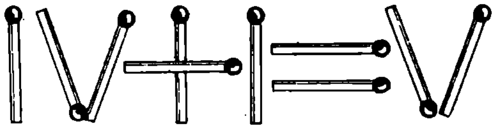


अध्याय-7

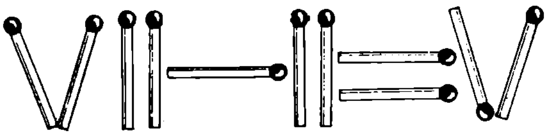
1.



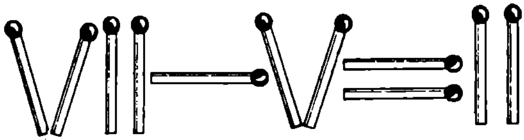
2.



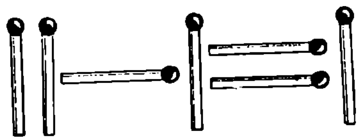
3.



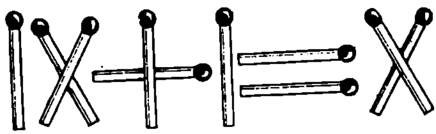
4.

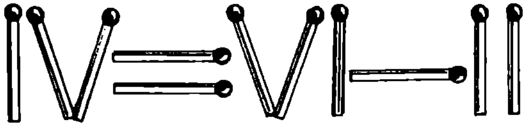


5.

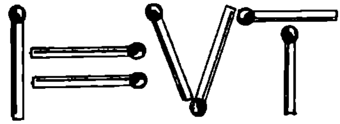


6.

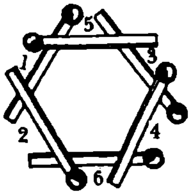




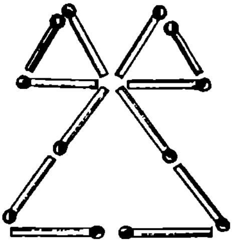
8.



9.

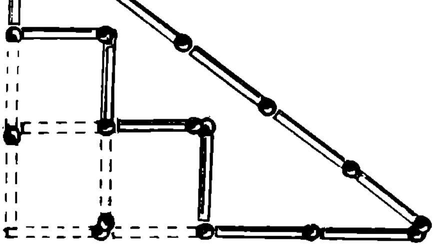


10.



11. आठ त्रिभुज, 8-8-1; 8-7-2; 8-6-3, 8-5-4; 7-7-3; 7-6-4; 7-5-5; 6-6-5

12.



अध्याय-8

जादुई वर्ग -1

25	32	9	16	23
31	13	15	22	24
12	14	21	28	30
18	20	27	29	11
19	26	33	10	17

जादुई वर्ग -2

45	32	31	42
34	39	40	47
38	35	36	41
33	34	43	30

जादुई वर्ग -3

20	7	6	17
9	14	15	12
13	10	11	16
8	19	18	5

जादुई वर्ग -4

1	14	15	4
8	11	10	5
12	7	6	9
13	2	3	16

जादुई वर्ग -5

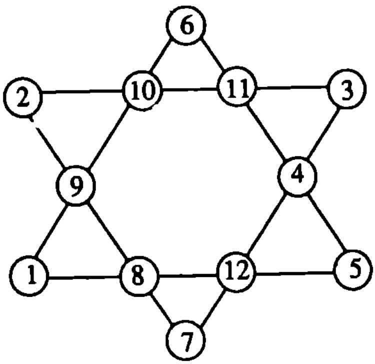
37	44	21	28	35
43	25	27	34	36
24	26	33	40	42
30	32	39	41	23
31	38	45	22	29

नासिक जादुई वर्ग

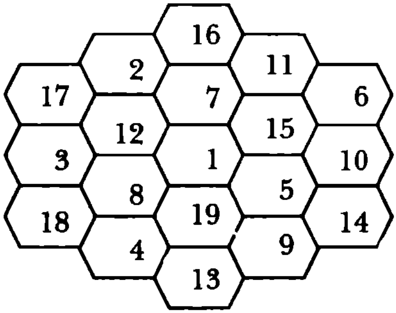
9	11	18	5	22
3	25	7	14	16
12	19	1	23	10
21	8	15	17	4
20	2	24	6	13

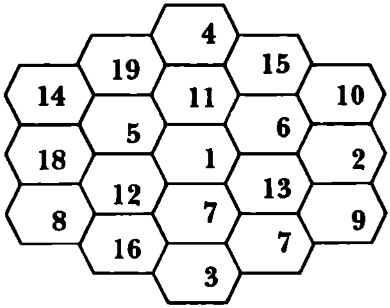
अध्याय-9

1. जादुई तारा

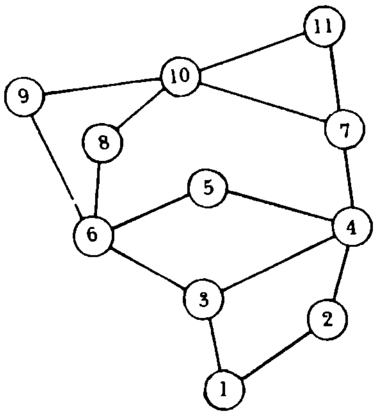


2. मधुमक्खी का छत्ता

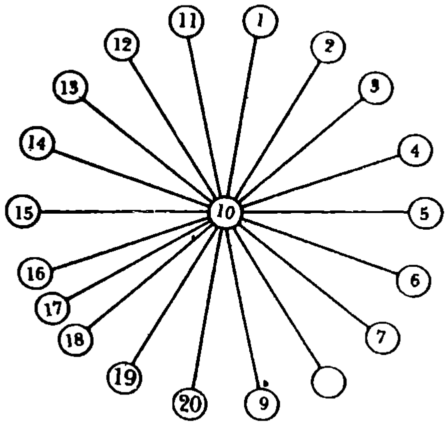




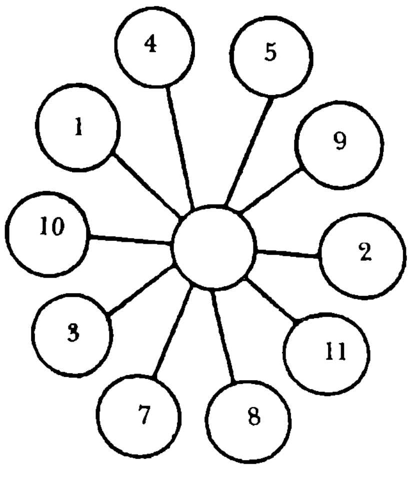
3. जादुई चित्र



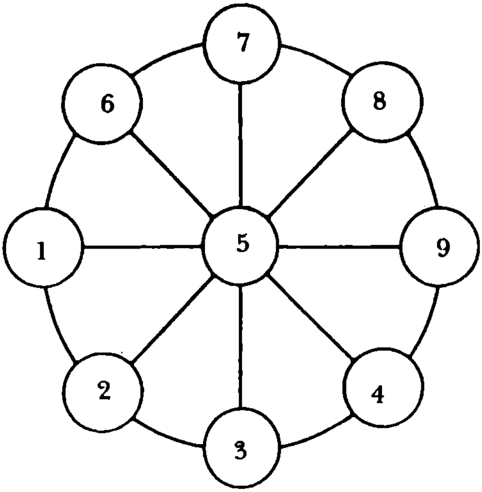
4. चक्र में संख्याओं का योग



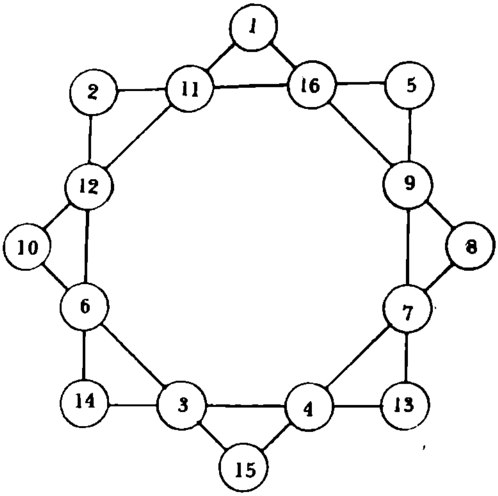
5. जादुई वृत्त



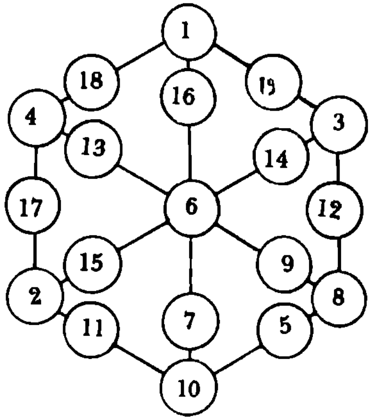
6. संख्या-चक्र



7. 8 बिंदुओं वाला तारा



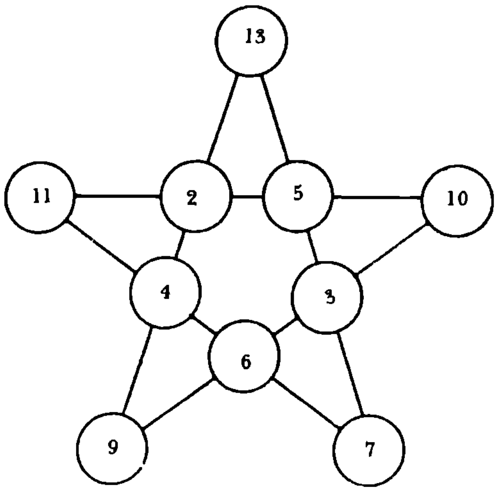
8. जादुई षट्कोण



9. गायब संख्या

7	5	8
9	12	18
9	7	10

10. पंचतारा

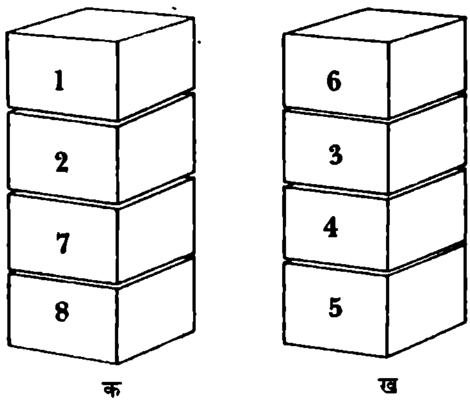


11. जादुई वृत्त

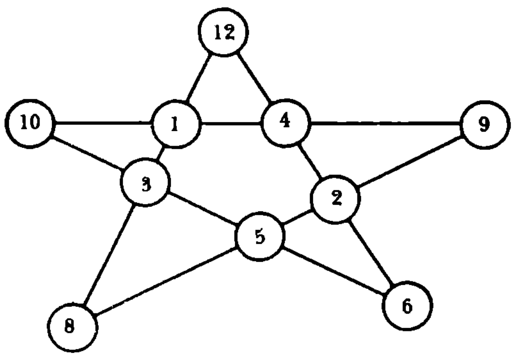
गायब संख्याएं हैं 3 और 89 । इनसे श्रेणी बनती है : 0 + 1 = 1, 1 + 1 = 2, 2 + 3 = 5 आदि। उत्तर गुणोत्तर श्रेणी में हैं।

12. जादुई गति

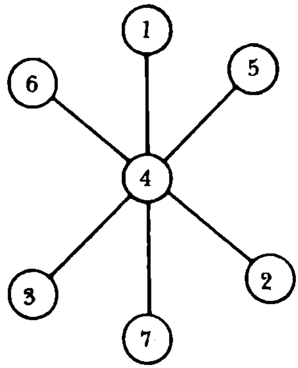
ब्लॉक में जिस बक्से में 9 लिखा है, उसे उलट दीजिए। ऐसा करने पर दोनों का योग 18 हो जाएगा।



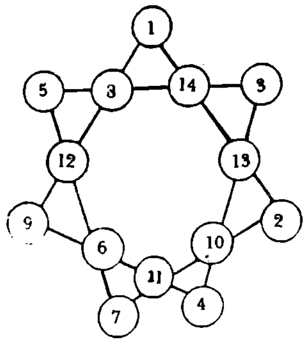
13. विचित्र तारा

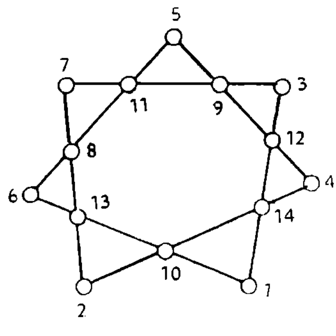


14. लॉलीपॉप खेल

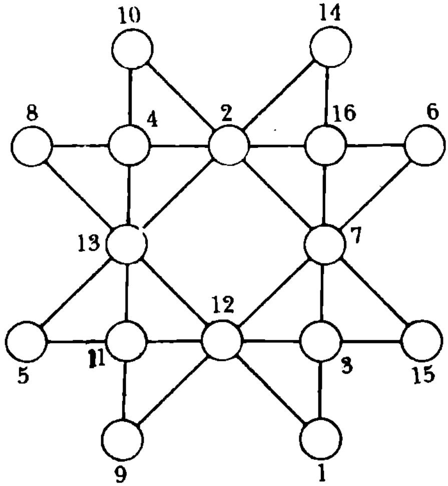


15. 7 बिंदुओं वाला तारा





16. 8 बिंदुओं वाला तारा



अध्याय-10

लंबी रेखा

दोनों रेखाओं की लंबाई समान है। कोणीय प्रभाव के कारण रेखा क रेखा ख से बड़ी दिखाई देती है।

सफेद और काला

सफेद वृत्त काले वृत्त की तुलना में चमक के प्रभाव के कारण बड़ा दिखता है, लेकिन दोनों की माप समान है।

दो लंबवत् रेखाएं

दोनों रेखाओं की लंबाई समान है, लेकिन ऊर्ध्वाकार, क्षैतिज से अधिक लंबी लगती है।

सबसे लंबी रेखा

यद्यपि तीनों रेखाएं क, ख और ग समान लंबाई की हैं, परंतु विभिन्न कोणों के कारण उनके सीधे भाग लंबे दिखाई देते हैं।

काटती हुई रेखाएं

रेखा क रेखा ख की सीध में दिखाई देती है, लेकिन वास्तव में रेखा क, रेखा ग की सीध में है। यह एक सामान्य अनुभव की बात है। जब किसी छड़ का कुछ भाग पानी में डुबो दिया जाता है, तो पानी के अंदर का भाग दृष्टिभ्रम के कारण टेढ़ा दिखाई देता है।

दो कर्ण

यद्यपि क ख और क ग की लंबाई समान हैं, परंतु विभिन्न कोणों के कारण क ख की लंबाई क ग की लंबाई से अधिक लगती है। आप इसे पैमाने से माप कर देख सकते हैं।

आंखों का भ्रम

क और ख - दोनों की लंबाई समान है, लेकिन बाहर के मुड़ाव के कारण एक की लंबाई काफी अधिक लगती है।

बड़े वृत्त

वृत्त क, वृत्त ख की तुलना में बड़ा लगता है, यद्यपि दोनों के आकार समान हैं। इनकी स्थिति के कारण आंखों को भ्रम हो जाता है।

विकृत वृत्त

यद्यपि वृत्त में कोई भी टेढ़ापन नहीं है, परंतु इसके पीछे बने त्रिभुजों के प्रभाव के कारण यह टेढ़ा-मेढ़ा दिखाई देता है।

पॉजिटिव और नेगेटिव

घ

अध्याय-11

---

6. 49 गायें

कुल गायें = 49

प्रत्येक के हिस्से में = 7 गायें

$$\text{दुग्ध उत्पादन} = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{49 \times 50}{2}$$

= 1225 लिटर

अर्थात् प्रत्येक व्यक्ति को 7 गायें मिलनी चाहिए, जो 175 लिटर दूध दें। इनका बंटवारा इस प्रकार किया जा सकता है।

पहला पुत्र	1	11	20	22	24	48	49
दूसरा पुत्र	2	10	14	23	33	46	47
तीसरा पुत्र	3	7	12	31	32	35	45
चौथा पुत्र	4	8	17	26	36	41	43
पांचवां पुत्र	5	16	19	29	30	34	42
छठा पुत्र	6	15	18	27	28	37	44
सातवां पुत्र	9	13	21	25	38	39	40

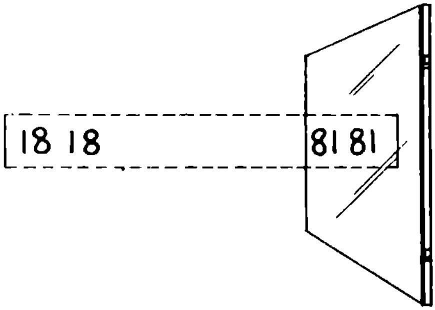
7. बुद्धिमान दुकानदार

1 किग्रा., 3 किग्रा., 9 किग्रा., 27 किग्रा.।

अध्याय-12

1. 46
2. मान लिया कि बड़े ग्रहण का व्यास X है। इसलिए ग घ = X –9 और ङ ग = X –5। तब X –5 का मध्य अनुपात होगा X-9 और X। इसके अनुसार X का मान 25 हुआ। इसलिए दो ग्रहणों का व्यास 50 और 41 इंच हुआ।
3. 49 वर्ष।
4. 99 वर्ष, क्योंकि 0 वर्ष नहीं था।
5. प्रत्येक ने 10 रुपये दिए, क्योंकि वो दादा, पिता और पुत्र थे।
6. कमान का मूल्य 20.50 रुपये तथा तीर का मूल्य केवल 50 पैसे।
7. 8 अतिथि।
8. 45 एक पैसा, 2 पांच पैसे, 2 दस पैसे और 1 पच्चीस पैसे का सिक्का।
9. 28 घंटा।
10. एक ग्रेप फ्रूट का वजन 600 ग्राम है।

11. 1818



12. 2519

13. 10

14. 17 का घन 4913 है। यही अंकों का योग है।

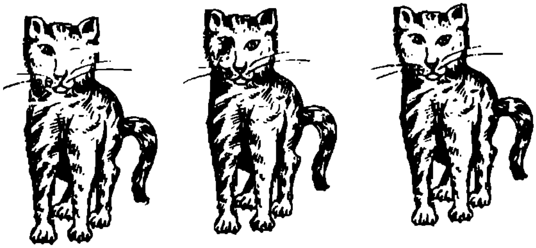
15. 1961

16. 29 फरवरी ।

17. 196 और 961

18. 12 बजकर 15 मिनट।

19. तीन।



20. 1 किग्रा., 3 किग्रा., 9 किग्रा., 27 किग्रा., 81 किग्रा. तथा 243 किग्रा. ।

21. $1^3 + 5^3 + 3^3 + = 153$

22. 7 बजकर $5\frac{1}{2}$ मिनट ।

23. 9 बजकर 20 मिनट।

24. मील के इंच, 63,360 रविवार लगभग 52,000

25. सप्ताह के सेकंड 604, 800 फुट 528,000

26. 8

27. $1 + \pi/4$ वर्गमी.

28. $1\frac{1}{3}$

29. 2,001,000

30. 7 – लाल, हरा, एंबर, लाल और हरा, लाल और एंबर, एंबर और हरा, लाल और हरा तथा एंबर।

31. 66 + 66 + 6 + 6 = 144

32. 8

33. $9^{9-9} = 9^0 = 1$

34. 8 फुट और 15 फुट।

25. 32 दिन।

36. 6.25

37. रविवार।

38. 1.2

39. 450

40. दिसंबर 31 तथा यह कथन पहली जनवरी को दिया गया।

अध्याय-13

1. कमीज का मूल्य 125 रुपये तथा अंडरवियर का 25 रुपये।

2. यह प्रश्न युगपत समीकरणों द्वारा हल किया जा सकता है।

   आटे के कनस्तर का वजन 4 किग्रा. है।

3. 8 बजकर 28 मिनट।

8.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

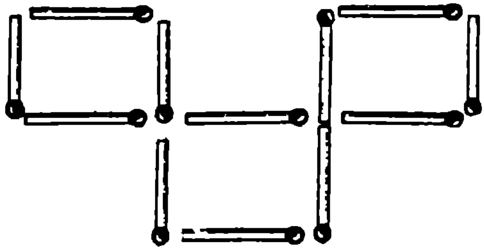
9.

12	7	14
13	11	9
8	15	10

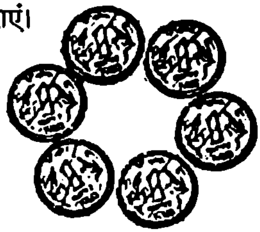
10.

15	8	1	24	17
16	14	7	5	23
22	20	13	6	4
3	21	19	12	10
9	2	25	18	11

11.

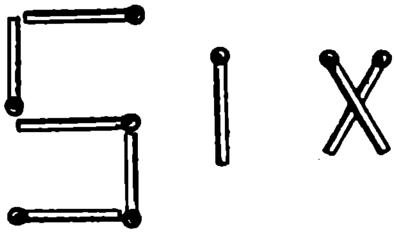


12. 4 को खिसकाकर 5 और 6 से स्पर्श कराएं।
5 को खिसकाकर 1 और 2 से स्पर्श कराएं।
1 को खिसका कर 4 और 5 से स्पर्श कराएं।

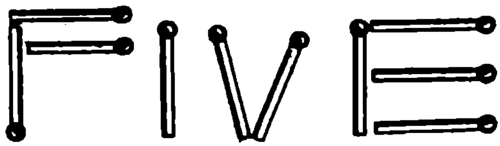


14. (क) विनोद, (ख) रूसी, (ग) श्याम, (घ) विनोद

15.

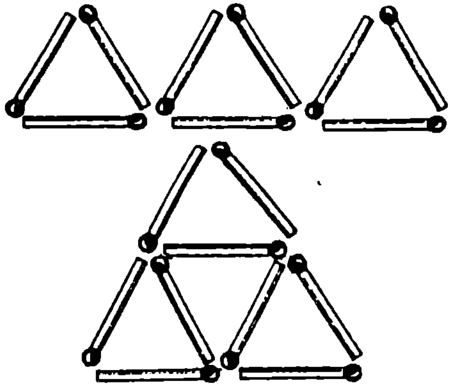


16.



17. दूसरा चित्र।

19.



20. युगपत समीकरण द्वारा इस प्रश्न को हल करें-

मैं 18 वर्ष का हूं, भाई 23 का है और मेरी बहन 16 वर्ष की है।

21. मेरी उम्र 9 वर्ष है।

22. मेरी उम्र 13 वर्ष है।

23. प्रत्येक ने 2 रुपए खर्च किया। वे दादी, मां और बेटी थीं।

24. सीता 26 वर्ष की है।

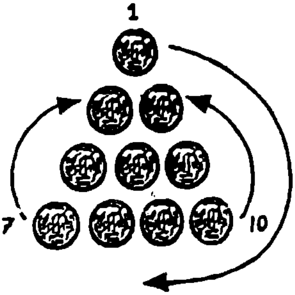
25. $\frac{\lfloor 3}{\cdot 3} = 20$

26. $\frac{66}{.66} = 100$

27. 888 + 88 + 8 + 8 + 8 = 1000

28. क = 9, ख= 5, ग = 4

29. मान लिया कि हमारे पास 10 सिक्के हैं -

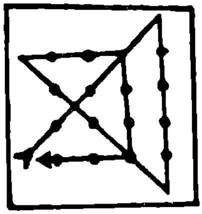


अब सिक्का नं. 7 को सिक्का नं. 2 की बायीं तरफ खिसकाइए। सिक्का नं. 10 को सिक्का नं. 3 की दायीं ओर खिसकाइए। सिक्का नं. 1 को नीचे की पंक्ति में 8 और 9 के नीचे लाइए।

30. मार्क वाले सिक्कों को एक साथ बिंदु वाले स्थान पर लाइए और दूसरे सिक्कों को इन दो कतारों के खाली स्थान पर लाइए।

31. 4 मिनट

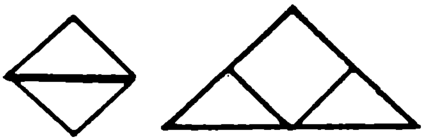
32.



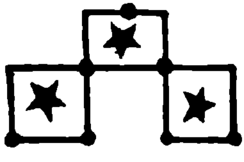
33. 7 और 1

34. 10 मिनट

35.



36.



37. 357

12, 15, 18 और 24 का लघुतम 360 है। इसमें से 3 घटाने पर परिणाम 357 आता है।

38. 100

39. 30

40. 160

41. पहले खाने में कुल 9, दूसरे में 10, तीसरे में 11, चौथे में 12, इस क्रम से पांचवें में 13 होगा। अत: यहां X का मान 2 है।

42. सितंबर। उपर्युक्त सूत्र एक माह में कुल दिनों की संख्या बता रहा है। मात्र सितंबर ही एक ऐसा माह है, जिसके पहले दो माह 31 दिनों के और बाद का महीना भी 31 दिनों का होता है।

43. एक के बाद दो ऐसी शृंखलाएं बनाएंगे, जो 7 6 5 4 3 और 8 9 10 11 12 से शुरू होती है, तो X = 4 और Y = 11 होगा।

44. वह कोई भी संख्या चुने, आपका उत्तर सदैव 37 ही होगा।

उदाहरण :

444 4 + 4+ 4 से भाग देने पर = 37

666 6 + 6 + 6 से भाग देने पर = 37

999 9 + 9 + 9 से भाग देने पर = 37

45. X = 6, Y =1

संख्या 1 से आरंभ करके घड़ी की सूई की दिशा में जाना–

1 2 3 4 5 6

6 से आरंभ करके उसी दिशा में जाना –

6 5 4 3 2 1

■■